2011年8月27日　第58回幾何学シンポジウム

コンパクト型Hermite対称空間の実形の対のFloerホモロジーとその応用

入江　博　(東京電機大学)

酒井高司(首都大)、田崎博之(筑波大)との共同研究

1　概要

単調なコンパクト型Hermite**対称空間の実形の対** (L_0, L_1) **について**, $\mathbb{Z}_2$ **係数の**Floer**ホモロジー** $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ **を計算**

↑　Y.-G.Oh **の**Floer**理論**

田中真紀子-田崎博之 (2010)

コンパクト型Hermite**対称空間** M **の二つの実形** L_0 **と** L_1 **の交叉 ＝ 対蹠集合**

2　定義と問題

Definition.

(M^{2n}, ω) : **シンプレクティック多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \omega \in \Omega^2(M),\ d\omega = 0,\ \omega^n \neq 0.$

Definition.

$L \subset (M, \omega)$: Lagrange**部分多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \dim L = \frac{1}{2} \dim M,\ \omega|_L = 0.$

Example.

$(M = T^*X, \omega = d\theta)$: **閉多様体** X **の余接束**

$L = o_X$: **零切断**

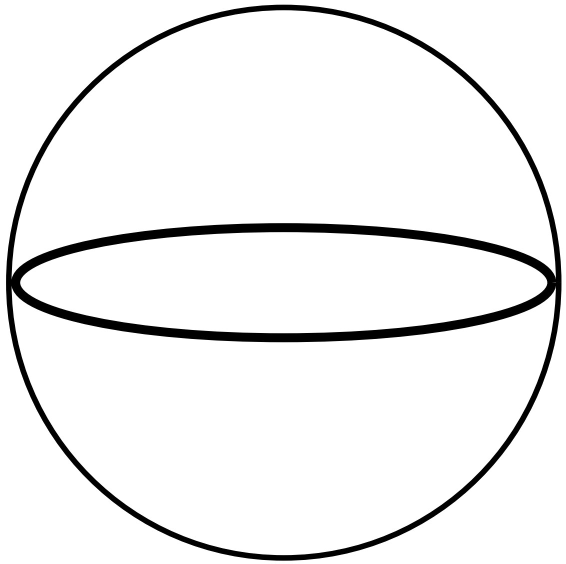
Example.

(M, J_0, ω) : **コンパクト型**Hermite**対称空間**

$\sigma : M$ **の対合的な反正則等長変換**

$L = \mathrm{Fix}\ \sigma$ (**実形**)

- $L \subset S^2 = \mathbb{C}P^1$: **大円**



Theorem (Arnold-Givental不等式：Oh)

(M, J_0, ω)：コンパクト型Hermite対称空間

M は既約とする.

$L = \mathrm{Fix}\,\sigma : M$ の実形

$\Longrightarrow$

L と $\phi(L)$ が横断的に交わるような任意の

$\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ に対して,

$$\#(L \cap \phi(L)) \geq \sum_i \mathrm{rank} H_i(L, \mathbb{Z}_2).$$

- コンパクト型Hermite対称空間 M については, $\mathrm{Ham}(M,\omega) = \mathrm{Symp}_0(M,\omega)$.
- $SB(L,\mathbb{Z}_2) := \sum_i \mathrm{rank} H_i(L,\mathbb{Z}_2)$ と表す.
- 現在では, M の既約性についての仮定は不要. (深谷-Oh-太田-小野)
- 証明は, $HF(L,L:\mathbb{Z}_2) \cong H_*(L,\mathbb{Z}_2)$ による.

Problem (Y.-G. Oh, 1993)

コンパクト型Hermite**対称空間**M**において**,
実形L_0**と**L_1**が必ずしも合同でないとき**,
$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$**を計算せよ**.

- Lagrange**部分多様体**L_0**と**L_1**がハミルトン同位でないとき**, $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$**の計算例が少ない**.
- **一つの**Lagrange**部分多様体**L**と**$\phi(L)$**の交叉は**, ϕ**が小さいときは余接束**T^*L**での**o_L **と**L**上の完全**1-**形式**df **のグラフとの交叉とみなせる**.

- 実形の対ではないが,

Theorem (Alston, 2008)
複素射影空間$(\mathbb{C}P^n, J_0, \omega_{FS})$の$2$つのLagrange部分多様体である実射影空間$\mathbb{R}P^n$とCliffordトーラス$T^n = \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid |z_0| = \cdots = |z_n|\}$を考える. $n = 2k-1$のとき,

$$HF(\mathbb{R}P^{2k-1}, T^{2k-1} : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^k}.$$

3　主結果

Theorem 1 (酒井-田崎- I)

(M, J_0, ω): **単調なコンパクト型** Hermite **対称空間**

$L_0, L_1 : M$ **の横断的に交わる** 2 **つの実形**,

最小 Maslov **数はともに** 3 **以上**

$\Longrightarrow$

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p].$$

M が既約の場合

Theorem 2 (酒井-田崎- I)
(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり，L_0 は $G_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同，L_1 は $U(2m)$ と合同ならば，

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^m}.$$

- $2^m < \binom{2m}{m} = SB(L_0, \mathbb{Z}_2) < SB(L_1, \mathbb{Z}_2)$

(2) それ以外では，

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{SB(L_0), SB(L_1)\}}.$$

Corollary 3 (generalized Arnold-Givental)

(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり，L_0 は $G_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同，L_1 は $U(2m)$ と合同ならば，

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq 2^m.$$

(2) それ以外では，

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \min\{SB(L_0, \mathbb{Z}_2), SB(L_1, \mathbb{Z}_2)\}.$$

ここで，M は既約，$L_0 \pitchfork \phi L_1$ としている．

Table.

M	L_0	L_1
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$
$G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$	$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$	$G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q})$
$G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	$G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$
$G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$	$G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$	$U(2m)$
$Sp(2m)/U(2m)$	$Sp(m)$	$U(2m)/O(2m)$
$SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)/Sp(m)$	$SO(2m)$
$E_6/T\cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	$G_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$
$E_7/T\cdot E_6$	$T\cdot(E_6/F_4)$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$

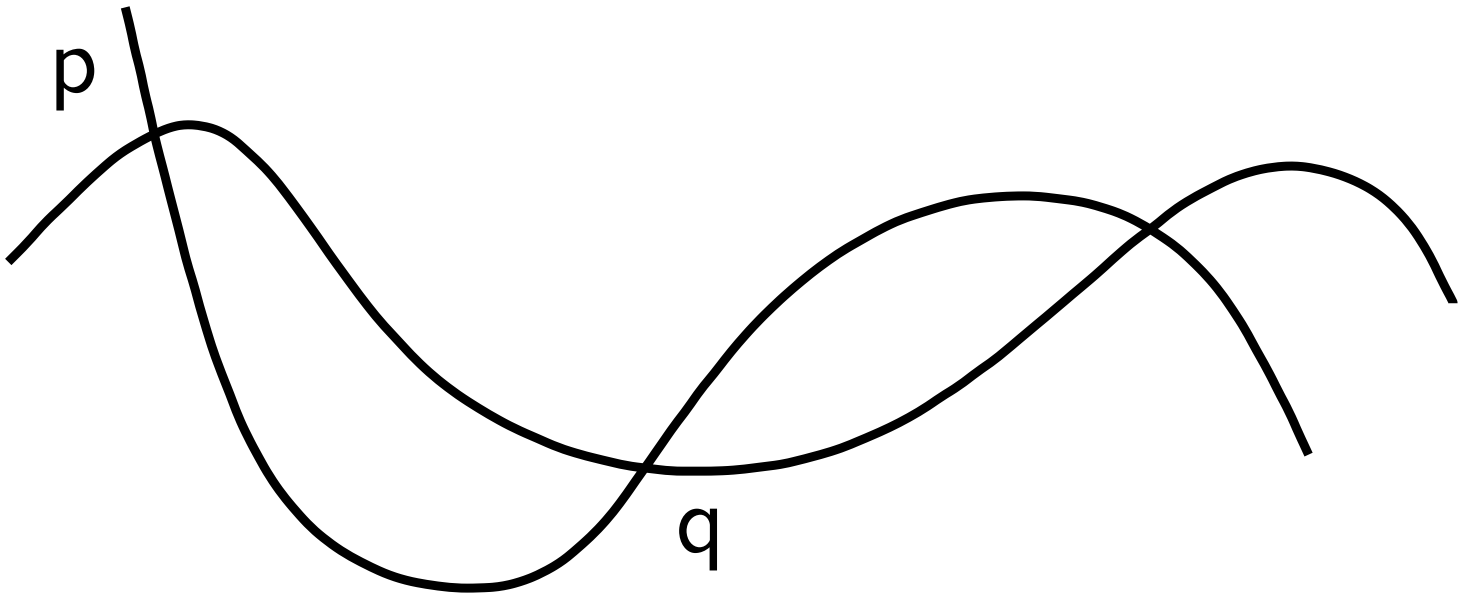
ここで, $S^{k,n-k}=(S^k\times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$.

4　Floer ホモロジー

(M, ω) : シンプレクティック多様体

$J : \omega$ と compatible な概複素構造

L_0, L_1 : 閉 Lagrange 部分多様体, $L_0 \pitchfork L_1$

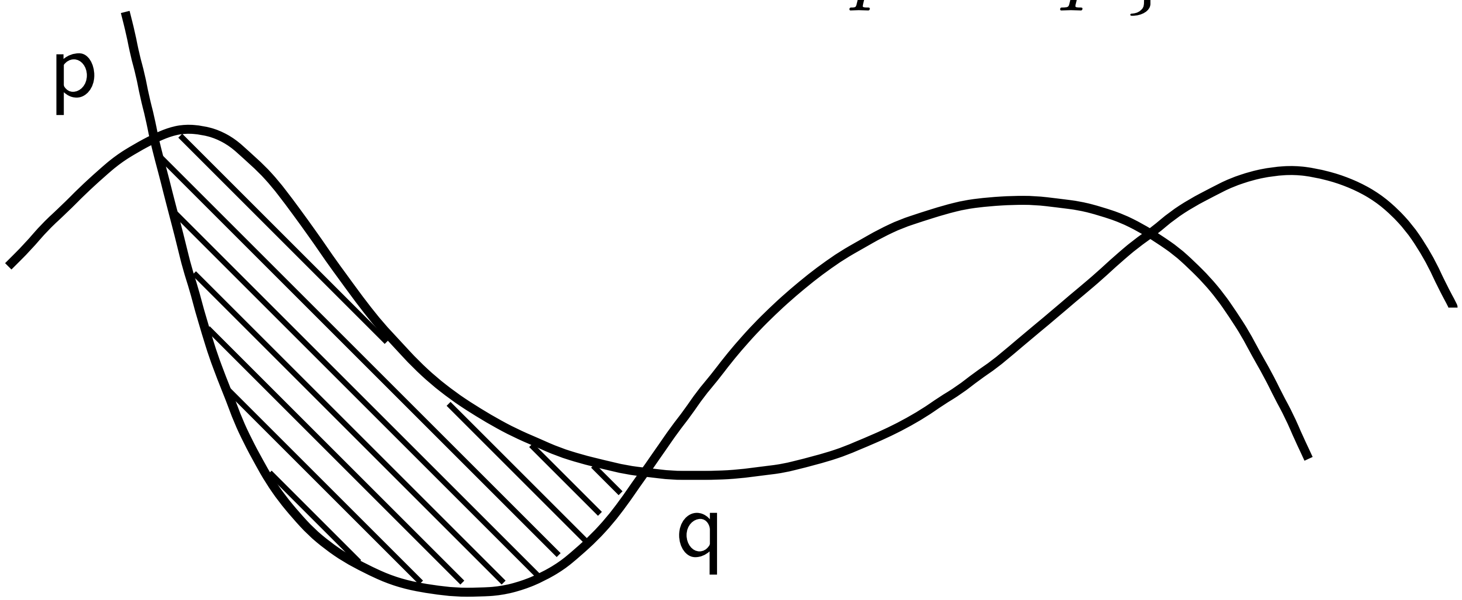


$CF(L_0, L_1)$: $L_0 \cap L_1$ で生成される自由 $\mathbb{Z}_2$-加群

$$\partial : CF(L_0, L_1) \longrightarrow CF(L_0, L_1)$$

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q$$

$n(p,q) := \#_2\{$ isolated J-holomorphic strip from p to q $\}$



- $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ satisfying

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u) \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(\cdot, 0) \in L_0, \ u(\cdot, 1) \in L_1, \\ u(-\infty, \cdot), \ u(+\infty, \cdot) \in L_0 \cap L_1. \end{cases}$$

- $\partial^2 = 0 \implies HF(L_0, L_1) := \ker \partial / \mathrm{im} \partial$

Lagrange**部分多様体の対**(L_0, L_1)**の**$\mathbb{Z}_2$**係数**
Floer**ホモロジー**

Theorem 4 (Oh)

L_0, L_1 : 単調, 最小Maslov数はともに3以上

$\Longrightarrow$

- $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$はwell-defined.
- $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong HF(L_0, \phi L_1 : \mathbb{Z}_2)$.

↓

$L_0 \pitchfork \phi L_1$であれは,

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \mathrm{rank}\ HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$$

Mの単調性

- $I_c : \pi_2(M) \to \mathbb{Z}$

$A \in \pi_2(M)$の代表元のC^∞写像$u : S^2 \to M$に対して, Chern数$c_1(A) := \langle c_1(M), [u] \rangle$を対応

- $I_\omega : \pi_2(M) \to \mathbb{R}$

$I_\omega(A) := \int_{S^2} u^*\omega$.

Definition.

- Mが単調

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある定数$\alpha > 0$が存在して, $I_\omega = \alpha I_c$.

- 既約コンパクト型Hermite対称空間 M は単調.
- 単調なコンパクトKähler多様体の実形は単調.
- 既約コンパクト型Hermite対称空間 M の実形 L は単調で, その最小Maslov数は一つの例外を除いて 3 以上.

Proposition 5

コンパクト型Hermite対称空間 (M, J_0, ω) では,
(M, ω) が単調 $\Longleftrightarrow$ M がKähler-Einstein.

- 可約な場合の計算

5　対蹠集合

Definition (Chen-長野, 1988)

M : Riemann **対称空間**

$M \supset S$: **部分集合**, s_x : **点** x **に関する点対称**

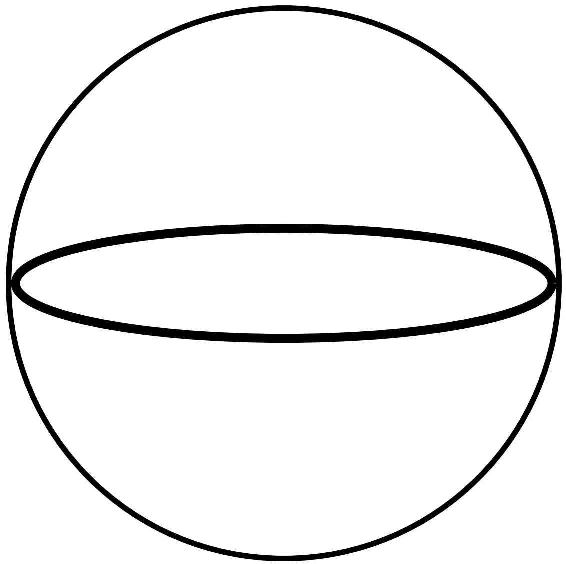
- S **が対蹠集合**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ S **の任意の点** x, y **に対して** $s_x y = y$ **が成り立つ**.

- M **の対蹠集合の元の個数の上限を** $\#_2 M$ **と表す**. (**2-number**)

Example.

- $S^2 = \mathbb{C}P^1$



点 $x \in S^2$ に関する点対称 s_x を考えると,
$s_x(x) = x, \ s_x(-x) = -x$.
$\{x, -x\}$ が S^2 の一つの対蹠集合で, $\#_2 M = 2$.

Theorem 6 (田中-田崎, to appear)
コンパクト型Hermite対称空間Mの二つの実形L_0とL_1の交叉は，$L_0 \pitchfork L_1$のとき，Mの対蹠集合である．

6　主定理(Thm1)の証明

任意の$p \in L_0 \cap L_1$に対して,

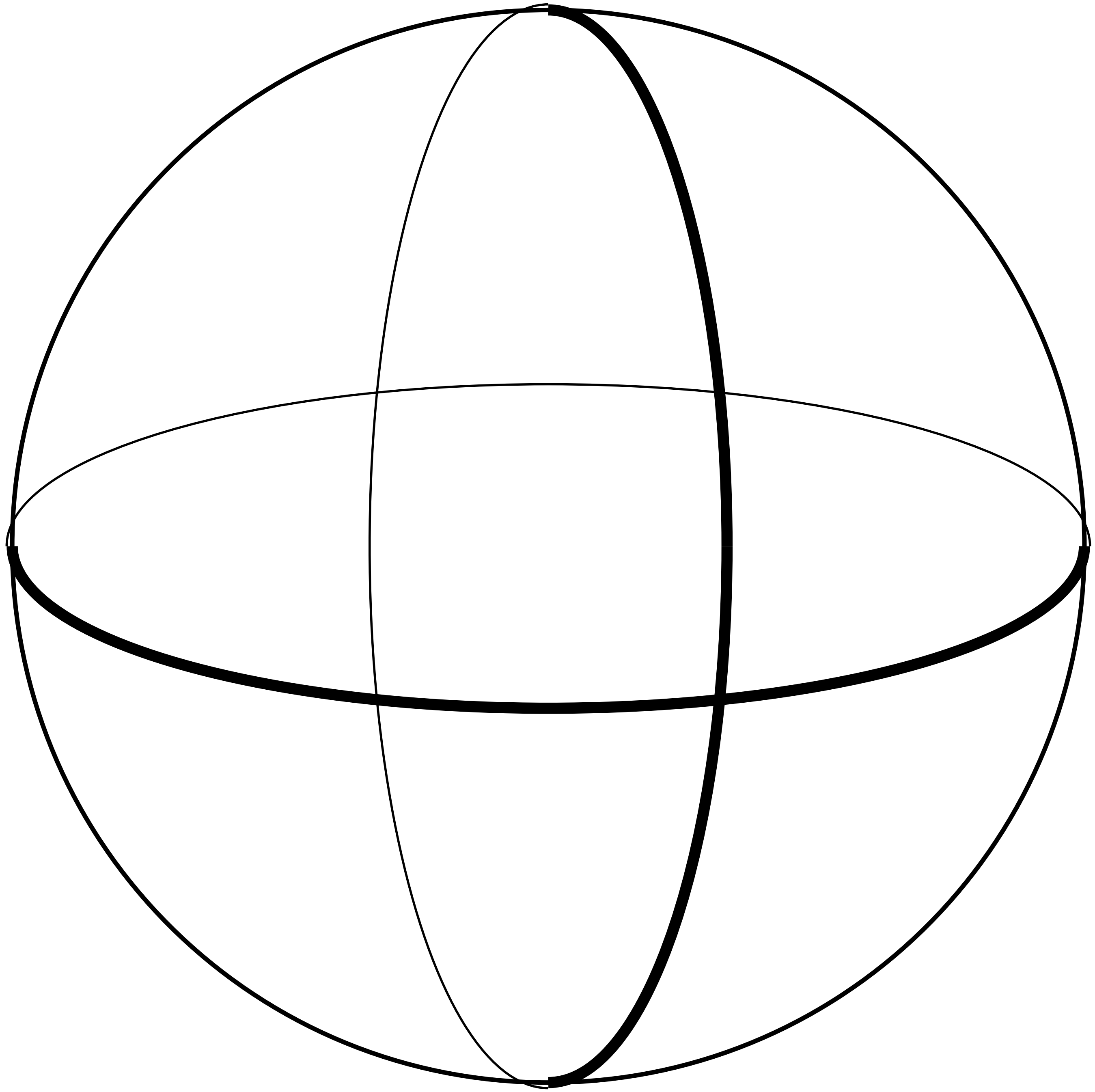
$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q = 0$$

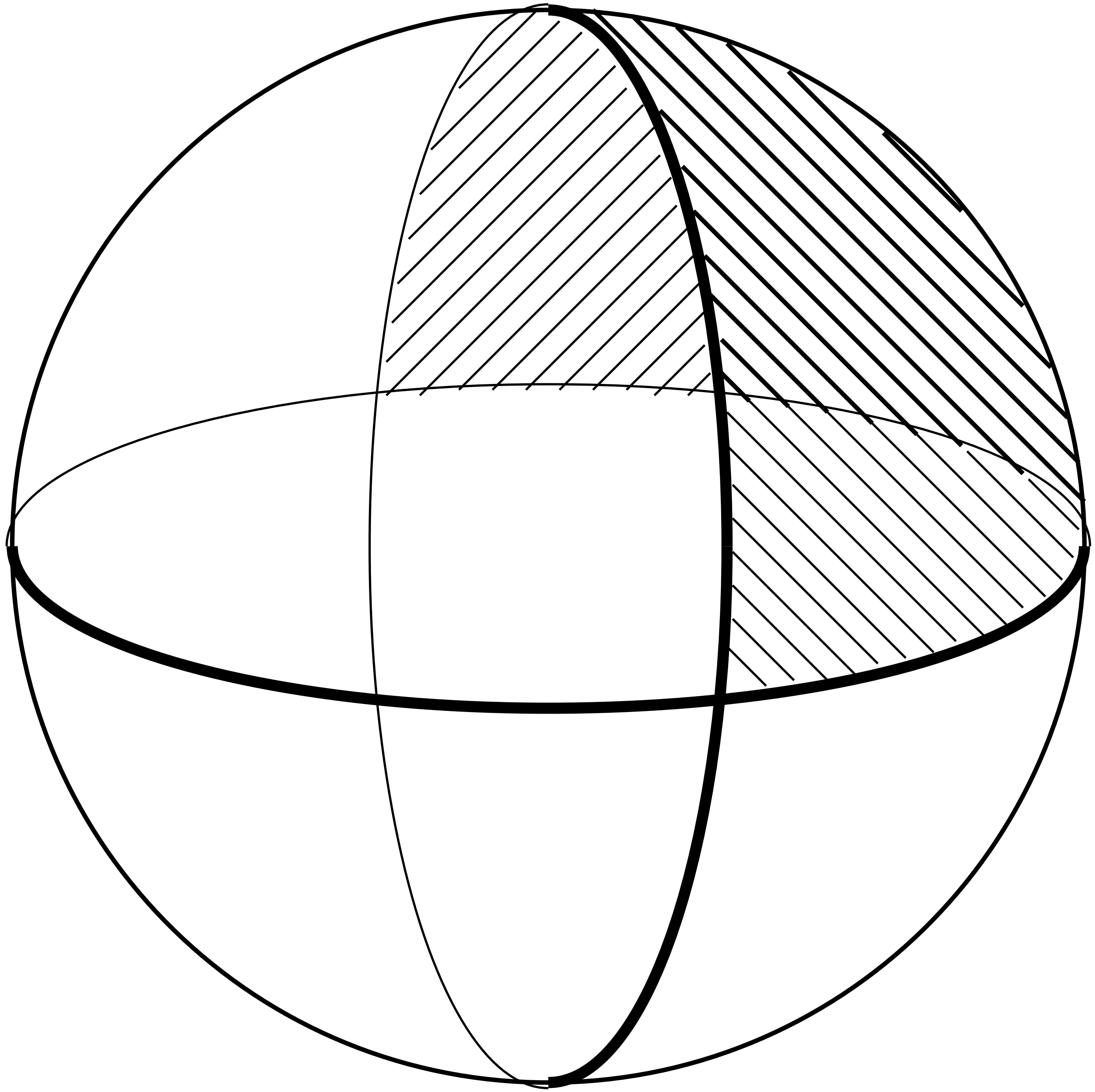
を示したい.

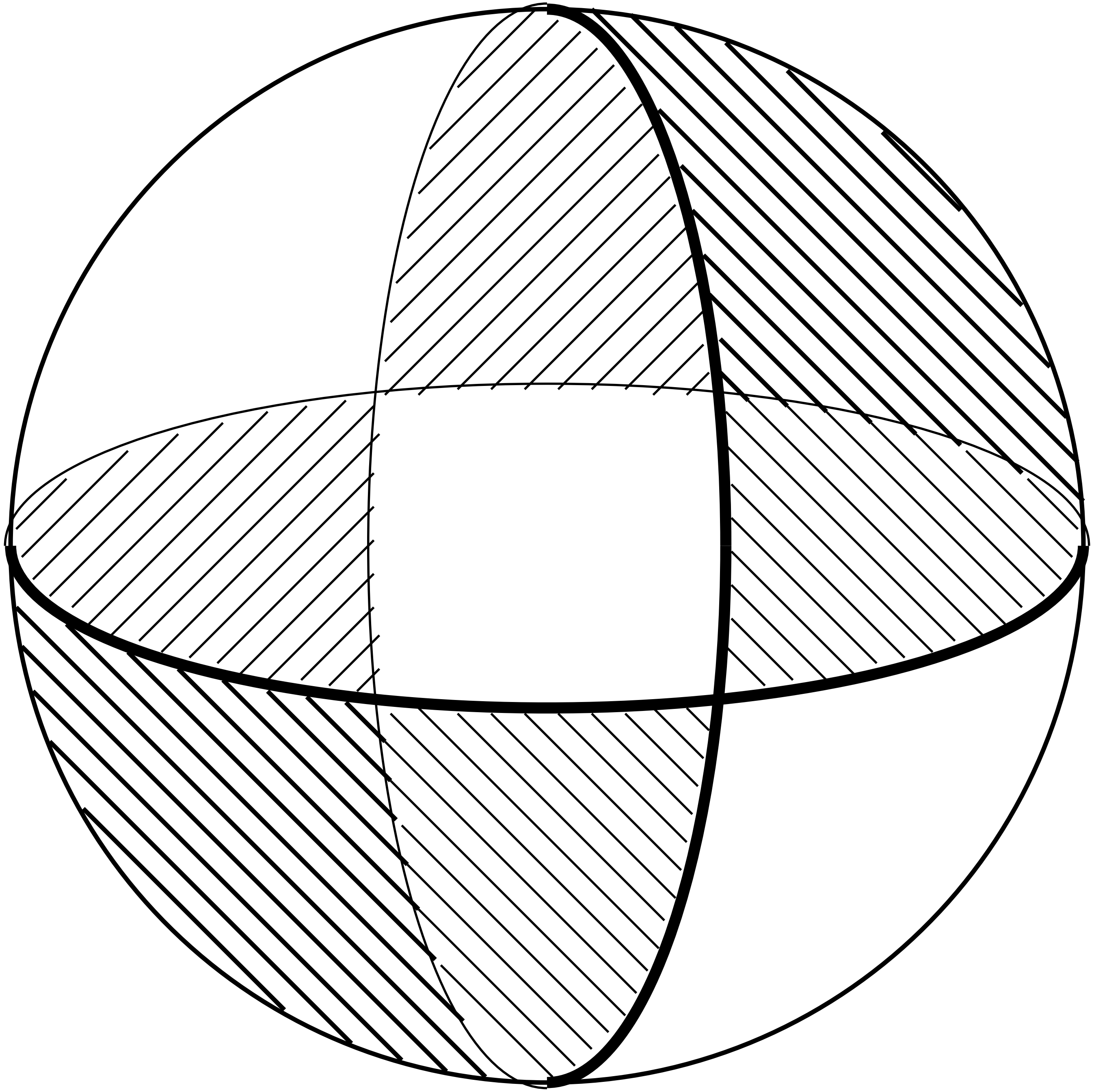
- J_0-holomorphic strip uがあったとする.
- 点対称s_pを考えると, $L_0 \cap L_1$: 対蹠集合

$s_p(p) = p,\ s_p(q) = q$.

- $s_p \circ u$を考える.







よって, $\partial(p) = 0$.

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p].$$

7　Hamilton**体積最小性問題への応用**

(M, J, ω) : Kähler**多様体**

$L \subset M$: **閉**Lagrange**部分多様体**

Definition.

- L : Hamilton**体積最小**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ **任意の**$\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$**に対して**,

$$\mathrm{vol}(\phi L) \geq \mathrm{vol}(L).$$

Theorem 7 (Kleiner-Oh, 1990)
$\mathbb{C}P^n$ の実形 $\mathbb{R}P^n$ は Hamilton 体積最小.

複素２次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$

- 実形 $L := (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$ に対する generalized Arnold-Givental 不等式
- Lê Hông Vân の Crofton 型の公式

Corollary 8 $\forall \phi \in \mathrm{Ham}(Q_n(\mathbb{C}), \omega)$ に対して,

$$\mathrm{vol}(\phi L) \geq \mathrm{vol}(S^n).$$

$Q_2(\mathbb{C})$	S^2	$S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$		
$Q_3(\mathbb{C})$	S^3	$S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2$		
$Q_4(\mathbb{C})$	S^4	$S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^2/\mathbb{Z}_2$	
$Q_5(\mathbb{C})$	S^5	$S^1 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	
$Q_6(\mathbb{C})$	S^6	$S^1 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2$
$Q_7(\mathbb{C})$	S^7	$S^1 \times S^6/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^4/\mathbb{Z}_2$

$Q_2(\mathbb{C})$	S^2	$S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$		
$Q_3(\mathbb{C})$	S^3	$S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2$		
$Q_4(\mathbb{C})$	S^4	$S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^2/\mathbb{Z}_2$	
$Q_5(\mathbb{C})$	S^5	$S^1 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	
$Q_6(\mathbb{C})$	S^6	$S^1 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2$
$Q_7(\mathbb{C})$	S^7	$S^1 \times S^6/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^4/\mathbb{Z}_2$

Hamiltonian volume minimizing
(I.-Ono-Sakai)

Homologically volume minimizing (Gluck-Morgan-Ziller, Lê)

$Q_2(\mathbb{C})$	S^2	$S^1 \times S^1/\mathbb{Z}_2$		
$Q_3(\mathbb{C})$	S^3	$S^1 \times S^2/\mathbb{Z}_2$		
$Q_4(\mathbb{C})$	S^4	$S^1 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^2/\mathbb{Z}_2$	
$Q_5(\mathbb{C})$	S^5	$S^1 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^3/\mathbb{Z}_2$	
$Q_6(\mathbb{C})$	S^6	$S^1 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^4/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^3/\mathbb{Z}_2$
$Q_7(\mathbb{C})$	S^7	$S^1 \times S^6/\mathbb{Z}_2$	$S^2 \times S^5/\mathbb{Z}_2$	$S^3 \times S^4/\mathbb{Z}_2$

Hamiltonian volume minimizing
(I.-Ono-Sakai)

H-stable (Oh, Amarzaya-Ohnita)

H-unstable (Oh, A-O)

Homologically volume minimizing (Gluck-Morgan-Ziller, Lê)