有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合

田崎博之

2015 年 2 月 15 日 (日)

定義 (Chen-長野)

M : コンパクトRiemann対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$x, y \in M$: 対蹠的 $\Leftrightarrow s_x(y) = y$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ x, y$: 対蹠的

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#S$: 最大値

$$[n] = \{1, \ldots, n\}$$

$$\binom{[n]}{k} = \{\alpha \subset [n] \mid |\alpha| = k\}$$

$\alpha, \beta \in \binom{[n]}{k}$ に対して

$$\alpha \backslash \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\}$$

α, β : 対蹠的 $\Leftrightarrow$ $|\alpha \backslash \beta|$: 偶数

$A \subset \binom{[n]}{k}$: 対蹠的

$\Leftrightarrow$ α, β : 対蹠的 $(\alpha, \beta \in A)$

$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$

: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ 内の $\boldsymbol{k}$ 次元有向部分空間全体

$\boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n})$ 不変 Riemann 計量により

Riemann 対称空間

$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合の分類

$\leftrightarrow \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の極大対蹠的部分集合の分類

(正規直交基底の元の選び方)

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$: $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$\boldsymbol{A}$: $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠的部分集合

$\Rightarrow \{\pm\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}(k)}\rangle_{\mathbb{R}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}\}$

: $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合

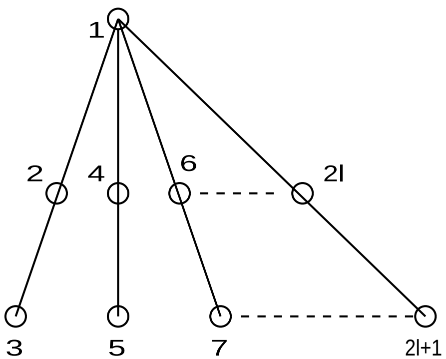
逆の対応も定まる

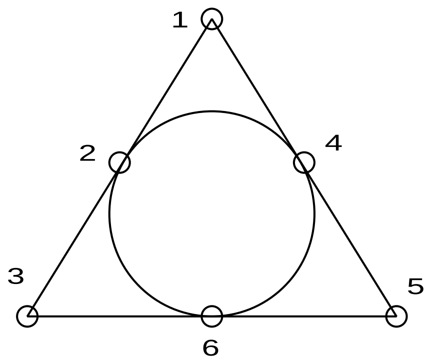
MAS：極大対蹠的部分集合

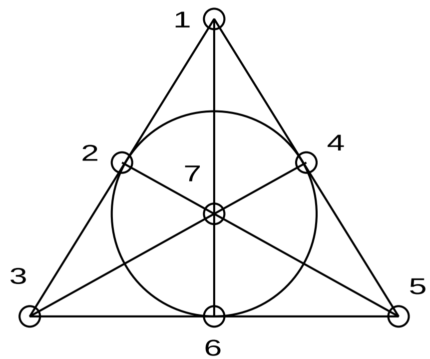
$k \leq 4$ のとき

$\binom{[n]}{k}$ の MAS の分類完成

$k = 3$ の場合







分類に現れる$\mathbf{MAS}$

$\downarrow$ 一般化

$\boldsymbol{k} > 4$ のときの $\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の$\mathbf{MAS}$

：分類または性質を調べる

$$A(2,2l) = \{\{1,2\},\{3,4\},\dots,\{2l-1,2l\}\}$$
$$\subset \binom{[2l]}{2}$$

$$A(2k,2l)$$
$$= \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \mid \alpha_i \in A(2,2l), \alpha_i \neq \alpha_j\}$$
$$\subset \binom{[2l]}{2k}$$

$$A(2k+1,2l+1)$$
$$= \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k,2l)\}$$
$$\subset \binom{[2l+1]}{2k+1}$$

定理

$\boldsymbol{A(2k, 2l), A(2k+1, 2l+1)}$: **AS**

$\boldsymbol{l \geq 3k+1}$ のとき

$\boldsymbol{A(2k, 2l)}$: **MAS in** $\boldsymbol{\binom{[2l]}{2k}, \binom{[2l+1]}{2k}}$

$\boldsymbol{A(2k+1, 2l+1)}$

: **MAS in** $\boldsymbol{\binom{[2l+1]}{2k+1}, \binom{[2l+2]}{2k+1}}$

$$\boldsymbol{a(k,n) = \max\left\{|A| \;\middle|\; A :\ \textbf{AS in } \binom{[n]}{k}\right\}}$$

$$\boldsymbol{a(1,n) = 1 \qquad a(2,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

$$\boldsymbol{a(2k,n) \geq \left|A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right| = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k},}$$

$$\boldsymbol{a(2k+1,n) \geq \left|A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)\right| = \binom{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{k}.}$$

$\boldsymbol{k} \leq 4$の場合の分類結果より

$$\boldsymbol{a(1,n) = 1, \quad a(2,n) = \lfloor n/2 \rfloor}$$

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7,\ldots,16}$	$\mathbf{17}$以上
$\boldsymbol{a(3,n)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$\mathbf{4}$	$\mathbf{7}$	$\boldsymbol{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$

$\boldsymbol{n}$	$\mathbf{5}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{8,\ldots,11}$	$\mathbf{12}$以上
$\boldsymbol{a(4,n)}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{7}$	$\mathbf{14}$	$\boldsymbol{\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}}$

定理

$$n \geq 61 \Rightarrow a(5, n) = \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{2}$$

$A \subset \binom{[n]}{5}$: 対蹠的、$|A| = \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{2}$

$\Rightarrow A : A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)$ と合同

(2014 年秋の学会講演では、仮定を $n \geq 57$ としていた。)

$$L \subset \{0, 1, \ldots, k-1\}$$

$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$: (n, k, L) 系

$\Leftrightarrow F, F' \in \mathcal{F}$, $F \neq F'$ ならば、$|F \cap F'| \in L$

$m(n, k, L) = \max\{|\mathcal{F}| \mid \mathcal{F} : (n, k, L)$ 系$\}$

定理 (Ray-Chaudhuri-Wilson)

$$m(n, k, L) \leq \binom{n}{|L|}.$$

$$\boldsymbol{L_k = \begin{cases} \{0, 2, \ldots, k-2\} & (k : \text{偶数}) \\ \{1, 3, \ldots, k-2\} & (k : \text{奇数}) \end{cases}}$$

$\boldsymbol{\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}}$ に対して

$\boldsymbol{\mathcal{F} : (n, k, L_k)}$ 系 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\mathcal{F}}$: 対蹠集合

定理 (**Frankl-徳重**)

$\boldsymbol{k}$: 偶数、$\boldsymbol{n}$: 十分大きい

$$\boldsymbol{m(n,k,L_k) = \binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\frac{k}{2}}}$$

$\boldsymbol{k}$: 奇数、$\boldsymbol{n}$: 十分大きい

$$\boldsymbol{m(n,k,L_k) = \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{\frac{k-1}{2}}}$$

いずれの場合も最大値を与えるものは標準的