複素Grassmann多様体の二つの実形の交叉

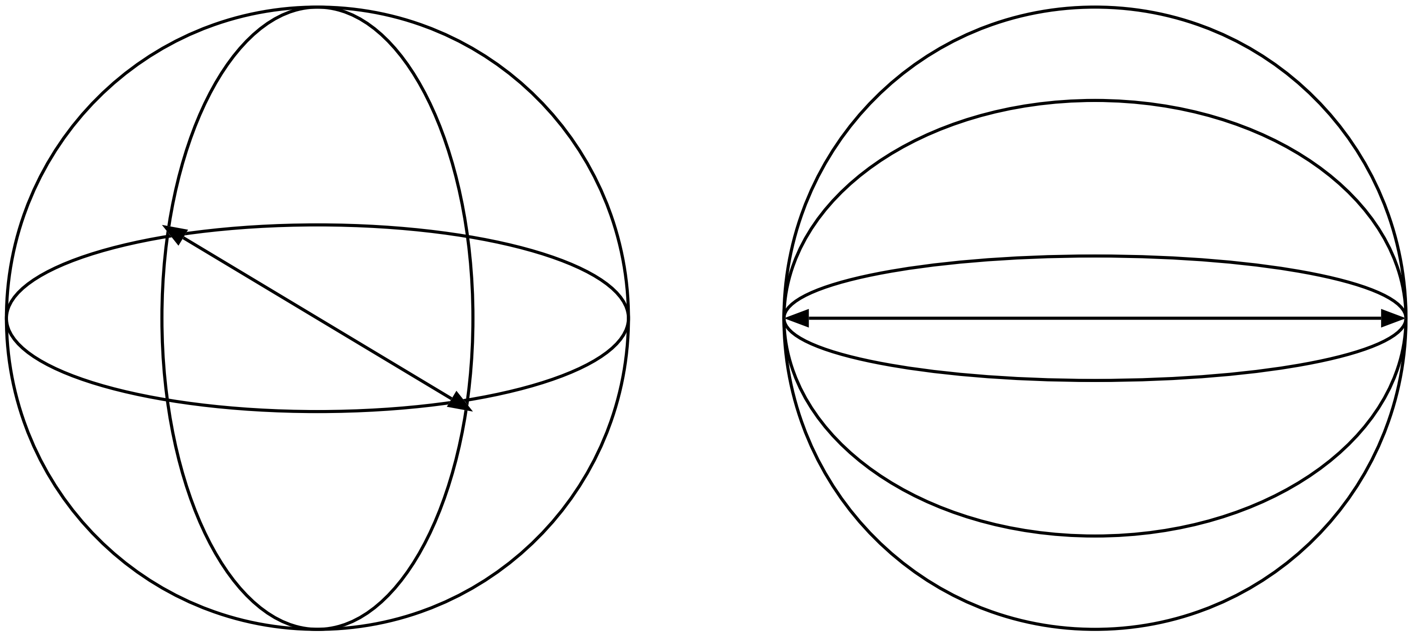
広島大学幾何学研究集会

田崎博之

筑波大学数理物質科学研究科

2009年10月7日

大円の交叉



対蹠点の対

複素二次超曲面：T

複素Grassmann：田中-T

基礎になる事項：

コンパクト対称空間の

実形(Hermiteの場合)：竹内

極地と対蹠集合：Chen-長野

2-numberと位相：竹内

最小軌跡：酒井

1．主結果と関連事項

$\bar{M}$：Hermite 多様体

M：$\bar{M}$ の実形

∃対合的反正則等長変換

$$\sigma : \bar{M} \to \bar{M}$$

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

実形：全測地的 Lagrange 部分多様体

実形の例

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \subset \mathbb{C}^{\boldsymbol{n}}$,

Lagrange部分空間,

$\mathbb{R}\boldsymbol{P}^{n} \subset \mathbb{C}\boldsymbol{P}^{n}$,

$\mathbb{R}\boldsymbol{P}^{1} \subset \mathbb{C}\boldsymbol{P}^{1}$：最初の例

コンパクト型Hermite対称空間
実形の分類：竹内

$\mathbb{C}P^n$ ： $\mathbb{R}P^n$

$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ ： $S^{k,n-k}$ $(0 \leq k \leq [n/2])$

$(= S^k \times S^{n-k}/\mathbb{Z}_2)$

$G_r^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+r})$ ： $G_r^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+r})$,

$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$ $(n = 2m, r = 2q)$,

$U(n)$ $(n = r)$

実形の交叉を記述する準備

Chen-長野

M : Riemann対称空間

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

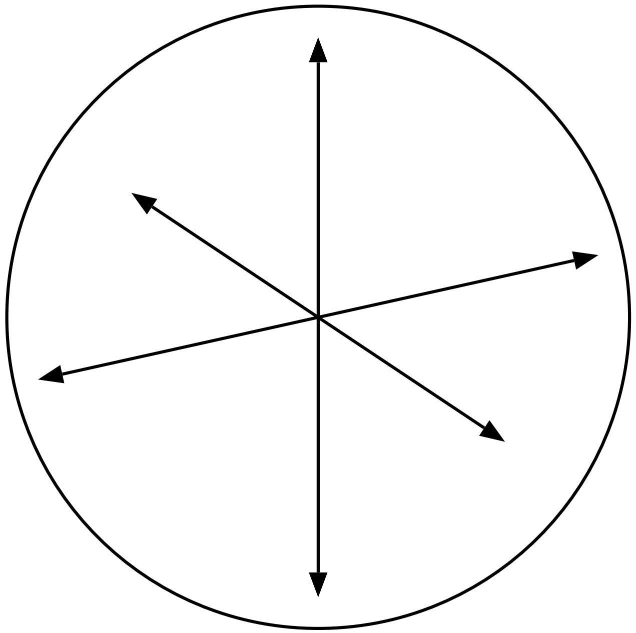
$\#_2 M$: Mの2-number

$= \sup\{\#S \mid S$は対蹠集合$\}$

対蹠集合の例

S^n の対蹠点の対 $\#_2 S^n = 2$

$$\#_2 \mathbb{R}P^2 = 3$$



$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に対して

$$\#_2 G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) = \binom{n+r}{r}$$

竹内：

M が対称 R 空間

$\Rightarrow \#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$

コンパクト型 Hermite

対称空間の実形：対称 R 空間

主定理

M	L_1(合同)	L_2(合同)
$\mathbb{C}P^n$	$\mathbb{R}P^n$	$\mathbb{R}P^n$
$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$
$G_r^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+r})$	$G_r^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+r})$	$G_r^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+r})$
$G_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2})$	$G_1^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+1})$	$G_1^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+1})$
$G_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2})$	$G_1^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+1})$	$G_2^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2})$

M, L_1, L_2：前ページのいずれか

L_1, L_2：横断的に交わる

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$：対蹠集合

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$$

Howard：$M = \mathbb{C}P^n$ の場合

$$\#(L_1 \cap L_2) = n + 1$$

Oh

M : Hermite対称空間

L : M のLagrange部分多様体

L : 大域的タイト

$\Leftrightarrow L, g\cdot L$ が横断的に交わる

$(g$: 等長変換$)$

$$\#(L \cap g\cdot L) = \dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

主定理において

L_1, L_2 が合同のとき、

　L_1 ：大域的タイト

Howard：次は大域的タイト

$\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$

入江-酒井：次は大域的タイト

$S^{0,2}, S^{1,1} \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^4) = S^2 \times S^2,$

$S^{0,n}, S^{1,n-1} \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$

2．主定理の証明の概要

補題 2.1

M ： コンパクトKähler 多様体、

　　正則断面曲率 > 0

L_1, L_2 ： M の全測地的コンパクト

　　Lagrange 部分多様体

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Frankel の定理と同様の証明法

X : コンパクトRiemann
多様体、$p \in X$

$C_p(X)$: pにおける最小軌跡

$\tilde{C}_p(X)$: pにおける接最小軌跡

$$C_p(S^n) = \{\bar{p}\}$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$に対して

$$C_p(\mathbb{K}P^n) = \mathbb{K}P^{n-1}$$

定理2.2(酒井)

M : コンパクト対称空間

A : 極大トーラス、$p \in A$

$$\tilde{C}_p(M) = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\tilde{C}_p(A),$$

$$C_p(M) = \bigcup_{k \in K} k \cdot C_p(A)$$

補題 2.3

M : コンパクト型 $\mathrm{Hermite}$

対称空間

L : M の実形、$o \in L$

$$\Rightarrow \tilde{C}_o(L) = T_oL \cap \tilde{C}_o(M)$$

$$C_o(L) = L \cap C_o(M)$$

L 内の最短測地線は M でも最短

Chen-長野

M：コンパクト対称空間

$o \in M$ の点対称 s_o

$F(s_o, M)$ の連結成分

：**極地**　　M_+ と書く

極地：全測地的部分多様体、

コンパクト対称空間

極地の例

$F(s_o, S^n) = \{o, \bar{o}\}$, $\bar{o}$ ： 対蹠点

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ に対して

$F(s_o, \mathbb{K}P^n) = \{o\} \cup \mathbb{K}P^{n-1}$

M ： コンパクト対称空間

$\Rightarrow F(s_o, M) - \{o\} \subset C_o(M)$

M : コンパクト型

Hermite対称空間

$\Rightarrow M_+$: 同上

L : Mの実形

$\Rightarrow L \cap M_+$: M_+の実形

M, L_1, L_2 : 主定理

$o \in L_1 \cap L_2$

$L_1 \cap L_2 - \{o\} \subset C_o(M)$

$L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$

極地による数学的帰納法