対称空間の対蹠集合

田崎博之

筑波大学

2014 年 10 月 10 日

広島幾何学研究集会

1　導入

Riemann 対称空間内の対蹠集合

: Chen-長野によって導入された概念

M : コンパクト Riemann 対称空間

$A \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow s_x(y) = y \quad (x, y \in A)$

$\#_2 M = \max\{\# A \mid A \subset M$: 対蹠集合 $\}$

M の 2-number　　幾何学的不変量

$\#_2 M$ を与える A : 大対蹠集合

対称 $\boldsymbol{R}$ 空間の場合

対蹠集合の全体、**2-number**

: よくわかっている (**Chen-**長野、竹内)

対称 $\boldsymbol{R}$ 空間ではない場合

対蹠集合の全体、**2-number**

: あまりよくわかっていない

対称 $\boldsymbol{R}$ 空間ではない典型的例

階数 **3** 以上の有向実 **Grassmann** 多様体

2 対称 R 空間の場合

(Chen-長野)

M : コンパクト型 Hermite 対称空間

$\Rightarrow \#_2 M = \chi(M) = \dim H_*(M;\mathbb{Z}_2)$

(竹内) M : 対称 R 空間

$\Rightarrow \#_2 M = \dim H_*(M;\mathbb{Z}_2)$

(田中-T.) 対称 R 空間内では

- 対蹠集合は大対蹠集合に含まれる
- 大対蹠集合同士は合同 ($I_0(M)$ で写り合う)

M : コンパクト型 Hermite 対称空間

M の対合的反正則等長変換の不動点集合

: 実形

(田中-T.) L_1, L_2 : M の実形

$L_1 \cap L_2$: 離散的 $\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2$: 対蹠集合

さらに L_1, L_2 : 合同

$\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2$: L_1, L_2 の大対蹠集合

(井川-田中-T.) 対称三対の応用 M : 既約

$L_1 \cap L_2$ が離散的になる必要十分条件を記述

さらに $L_1 \cap L_2$ = ある種の Weyl 群の軌道

上記結果の拡張 : 現在進展中

(入江-酒井-T.) $\boldsymbol{L_1 \cap L_2}$： 離散的

$(\boldsymbol{L_1, L_2})$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数 **Floer** ホモロジー

$$\boldsymbol{HF(L_1, L_2; \mathbb{Z}_2) = \sum_{p \in L_1 \cap L_2} \mathbb{Z}_2 p}$$

一般化された **Arnold-Givental** 不等式

$\boldsymbol{Q_n(\mathbb{C})}$ 内の実形 $\boldsymbol{S^n}$ の **Hamilton** 体積最小性

上記議論を複素旗多様体内の実形に拡張

共通点： コンパクト半単純 **Lie** 群の随伴軌道

実形をコンパクト対称対で記述

現在進展中

3　有向実Grassmann多様体の場合

$P_k(n) = \{\alpha \subset \{1, \dots, n\} \mid \#\alpha = k\}$

$\alpha - \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\} \qquad (\alpha, \beta \in P_k(n))$

α, β：対蹠的 $\Leftrightarrow \#(\alpha - \beta)$：偶数

$A \subset P_k(n)$：対蹠的

$\Leftrightarrow \alpha, \beta$：対蹠的 $(\alpha, \beta \in A)$

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$：$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元有向部分空間全体

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の分類

$\leftrightarrow P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合の分類

MAS：極大対蹠的部分集合

$e_1, \dots, e_n$ ： $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$\alpha \in P_k(n)$

$e_\alpha = \{e_{\alpha(i)} \mid 1 \le i \le k\}_{\mathbb{R}}$

$A \subset P_k(n)$

$e_A = \{\pm e_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$

$A \subset P_k(n)$ ： MAS

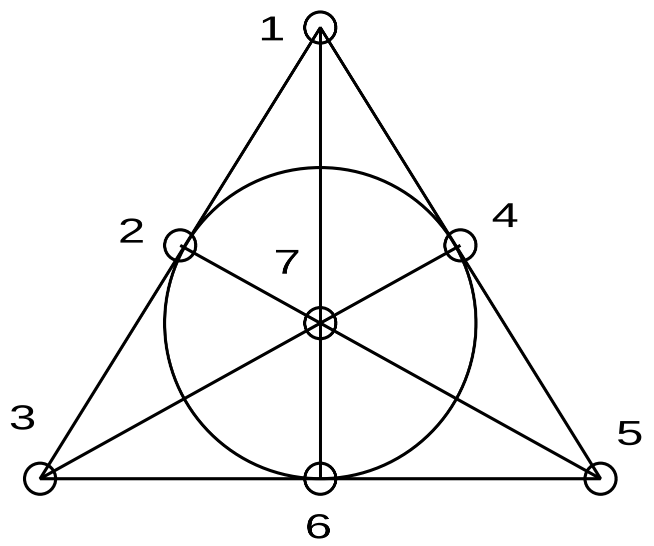
$\to e_A \subset \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ ： MAS

$\boldsymbol{k} \leq 4$ のとき

$\boldsymbol{P_k(n)}$ の MAS の分類完成

例： $\boldsymbol{P_3(7)}$

$\{\{\mathbf{1,2,3}\},\ \{\mathbf{1,4,5}\},\ \{\mathbf{2,4,6}\},\ \{\mathbf{3,5,6}\},$
$\quad \{\mathbf{1,6,7}\},\ \{\mathbf{2,5,7}\},\ \{\mathbf{3,4,7}\}\}$



分類に現れる$\mathbf{MAS}$

$\downarrow$ 一般化

$\boldsymbol{k > 4}$のときの$\boldsymbol{P_k(n)}$の$\mathbf{MAS}$

：分類または性質を調べる

4 対蹠的部分集合の系列

$$\boldsymbol{A(2,2l) = \{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2l-1,2l\}\}}$$

$$\boldsymbol{A(2k,2l)}$$

$$\boldsymbol{= \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \mid \alpha_i \in A(2,2l), \alpha_i \neq \alpha_j\}}$$

$$\boldsymbol{\subset P_{2k}(2l)}$$

$$\boldsymbol{A(2k+1,2l+1)}$$

$$\boldsymbol{= \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k,2l)\}}$$

$$\boldsymbol{\subset P_{2k+1}(2l+1)}$$

定理

$$A(2k, 2l), A(2k+1, 2l+1)\ :\ \mathbf{AS}$$

$$l \geq 3k+1 \Rightarrow$$

$$A(2k, 2l)$$

$$:\ \mathrm{MAS\ in}\ P_{2k}(2l),\ P_{2k}(2l+1)$$

$$A(2k+1, 2l+1)$$

$$:\ \mathrm{MAS\ in}\ P_{2k+1}(2l+1),$$

$$P_{2k+1}(2l+2)$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Ev_{2m}} &= \{\{\boldsymbol{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}\} \mid \boldsymbol{\alpha_i} \in \{\mathbf{2}\boldsymbol{i} - \mathbf{1}, \mathbf{2}\boldsymbol{i}\} \\
&\quad (\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{m})\ \#(\text{偶数の}\,\boldsymbol{\alpha_i}) : \text{偶数}\,\} \\
&\quad \subset \boldsymbol{P_m}(\mathbf{2}\boldsymbol{m})
\end{aligned}
$$

定理

$\boldsymbol{Ev_{2m}}$: **AS**

(1) $\mathbf{2}\boldsymbol{m} \equiv \mathbf{2, 4, 6}(\mathbf{mod 8})$ のとき、

$\boldsymbol{Ev_{2m}}$: **MAS in** $\boldsymbol{P_m}(\mathbf{2}\boldsymbol{m})$

(2)

$\boldsymbol{Ev_{8m}}$: **MAS**ではない **in** $\boldsymbol{P_{4m}}(\mathbf{8}\boldsymbol{m})$

$\boldsymbol{A}(\mathbf{4}\boldsymbol{m}, \mathbf{8}\boldsymbol{m}) \cup \boldsymbol{Ev_{8m}}$ **MAS in** $\boldsymbol{P_{4m}}(\mathbf{8}\boldsymbol{m})$

5 対蹠的部分集合の評価

$$a(k,n) = \max\{\#A \mid A : \text{AS in } P_k(n)\}$$

$$\#_2 \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) = 2a(k,n)$$

$$a(1,n) = 1 \qquad a(2,n) = [n/2]$$

$$a(2k,n) \geq \#A\left(2k, 2\left[\frac{n}{2}\right]\right) = \binom{[n/2]}{k},$$

$$a(2k+1,n) \geq \#A\left(2k+1, 2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)$$

$$= \binom{[(n-1)/2]}{k}.$$

$\boldsymbol{k \le 4}$の場合の分類結果の観察

$\boldsymbol{k = 3}$の場合

$$\boldsymbol{n \ge 17 \Rightarrow a(3, n) = \left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

$$\boldsymbol{A \subset P_3(n) : \mathbf{AS},\ \# A = \left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A : A\left(3, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right)}$$と合同

$\boldsymbol{k = 4}$の場合

$$\boldsymbol{n \geq 12 \Rightarrow a(4, n) = \binom{[n/2]}{2}}$$

$$\boldsymbol{A \subset P_4(n)} : \mathbf{AS},\ \boldsymbol{\#A = \binom{[n/2]}{2}}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A : A\left(4, 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)}$$ と合同

定理

$$\boldsymbol{n \geq 57 \Rightarrow a(5, n) = \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{2}}$$

$$\boldsymbol{A \subset P_5(n)} : \mathbf{AS},\ \#\boldsymbol{A} = \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow A : A\left(5, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right)} \text{ と合同}$$

最後の定理の証明の概要

$\boldsymbol{P_5(n)}$ の対蹠的部分集合 $\boldsymbol{A}$ について

$\#\boldsymbol{A}$ を評価する。

$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}\} \in \boldsymbol{A}$ としてよい。

これと対蹠的な $\boldsymbol{P_5(n)}$ 内の元の全体

$$\boldsymbol{P_3(\{1,2,3,4,5\}) \times P_2(\{6,\ldots,n\})}$$
$$\boldsymbol{\cup P_1(\{1,2,3,4,5\}) \times P_4(\{6,\ldots,n\})}$$

前者を $\boldsymbol{M_2}$、後者を $\boldsymbol{M_4}$ とおく。

これらは極地に対応している。

互いに素な合併

$$\boldsymbol{A = \{\{1,2,3,4,5\}\} \cup (A \cap M_2) \cup (A \cap M_4)}$$

$\boldsymbol{A \cap M_2 \subset A_1 \times A_2}$

$\boldsymbol{A_1}$: $\boldsymbol{P_3(\{1,2,3,4,5\})}$ の $\mathbf{AS}$

$\boldsymbol{A_2}$: $\boldsymbol{P_2(\{6,\ldots,n\})}$ の $\mathbf{AS}$

この場合、$\boldsymbol{\#(A \cap M_2)}$: 評価可能

積に含まれない場合、$\boldsymbol{\#(A \cap M_2)}$ は小さい

$\boldsymbol{A \cap M_4}$ についても同様

上記結果の拡張 : 現在進展中

互いに素な合併

$A = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\} \cup (A \cap M_2) \cup (A \cap M_4)$

$A \cap M_2 \subset A_1 \times A_2$

A_1 : $P_3(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ の AS

A_2 : $P_2(\{6, \ldots, n\})$ の AS

この場合、$\#(A \cap M_2)$: 評価可能

積に含まれない場合、$\#(A \cap M_2)$ は小さい

$A \cap M_4$ についても同様

上記結果の拡張 : 現在進展中と言いたい