有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合

田崎博之

筑波大学数理物質系

2017 年 10 月 5 日

広島幾何学研究集会

1　対蹠集合

定義(Chen-長野)

M : コンパクトRiemann対称空間

s_x : $x \in M$における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \; s_x(y) = y$$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow$ $|S|$: 最大値

上記最大値 $\#_2 M$: **2-number**

対称 R 空間の場合

2-number：Chen-長野、竹内

大対蹠集合の形：**Sánchez,** 田中**-T.**

対称 R 空間ではない場合

2-number：Chen-長野

対蹠集合の全体：わかりつつある

例外：階数 **3** 以上の有向実 **Grassmann** 多様体、$\boldsymbol{Spin(n)}$ $(\boldsymbol{n \geq 7})$

2　対蹠集合のこれまでの研究

対称 R 空間の場合 (竹内)

$$\#_2 M = \dim H_*(M; \mathbb{Z}_2)$$

Sánchez, 田中-T.

- 対蹠集合は大対蹠集合に含まれる
- 大対蹠集合同士は合同

多くのコンパクト対称空間

2-number：Chen-長野

対称 $\boldsymbol{R}$ 空間ではない場合

大対蹠集合ではない極大対蹠集合

コンパクト $\mathbf{Lie}$ 群

両側不変計量により対称空間

単位元を含む極大対蹠集合：部分群

基本可換 $\mathbf{2}$ 部分群 $(\mathbb{Z}_\mathbf{2}$ の積$)$

古典型コンパクト $\mathbf{Lie}$ 群

：極大対蹠部分群の共役類は一つ

古典型コンパクト Lie 群の商群

：分類 (田中-T.)

代数群の基本可換 p 部分群の共役類の

分類： Griess, Yu (代数的手法)

多くのコンパクト対称空間 G/K

：極地として G に埋め込める

G の極大対蹠部分群

$\Rightarrow$ G/K の極大対蹠集合

(田中-Yu-T.)

G_2, $G_2/SO(4)$ の極大対蹠集合

　具体的記述：田中-保倉-T.

上記の手法で扱いにくい対象

- スピノル群
- 有向実 Grassmann 多様体

　お互い関係している

二番目：本日の講演のテーマ

Kähler 多様体内の反正則対合的等長変換の不動点集合の連結成分：実形

コンパクト型 **Hermite** 対称空間

二つの実形の交叉

離散的 $\Rightarrow$ 対蹠集合 (田中-T.)

Floer ホモロジーを具体的に計算

: 入江-酒井-T.

交叉の **Weyl** 群による記述

: 井川-田中-T.

複素旗多様体

　コンパクト型 Hermite 対称空間の一般化

　(コンパクト Lie 群の随伴軌道)

$\boldsymbol{k}$ 次点対称による対蹠集合の定義

　: **Sánchez**

コンパクト型 Hermite 対称空間の成果

$\Rightarrow$ 複素旗多様体に拡張

　　井川-入江-奥田-酒井-T.

3　有向実 Grassmann 多様体

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$

　：$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元有向部分空間全体

$SO(n)$ 不変 Riemann 計量により

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$：Riemann 対称空間

正の向きの正規直交基底の外積を対応

$$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \subset \bigwedge^k \mathbb{R}^n$$

$\boldsymbol{X}$: 集合

$\binom{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}} = \{\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{X} \mid |\boldsymbol{\alpha}| = \boldsymbol{k}\}$

$[\boldsymbol{n}] = \{\mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{n}\}$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ に対して

$\boldsymbol{\alpha} \backslash \boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{\beta}\}$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$: 対蹠的 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha} \backslash \boldsymbol{\beta}|$: 偶数

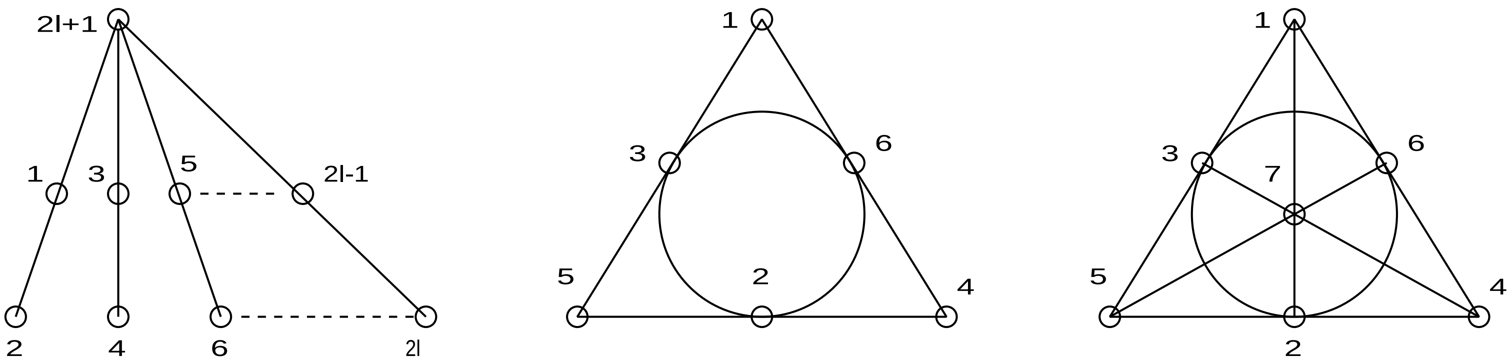
$\boldsymbol{A} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$: 対蹠的 $(\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A})$

$\binom{[n]}{\mathbf{1}}$ の対蹠集合：一点のみ

$\binom{[n]}{\mathbf{2}}$ の対蹠集合 $\{\{\mathbf{1},\mathbf{2}\},\{\mathbf{3},\mathbf{4}\},\cdots\}$

$\binom{[n]}{\mathbf{3}}$ の対蹠集合



三番目：**Fano** 平面 (二元体上の射影平面)

定理 $\mathbf{1(T.2013)}$

$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合の分類

$\leftrightarrow \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の極大対蹠的集合の分類

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ の正規直交基底

$\boldsymbol{A}$: $\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の極大対蹠的集合

$\Rightarrow \{\pm\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k})}\rangle_{\mathbb{R}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}\}$

: $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合

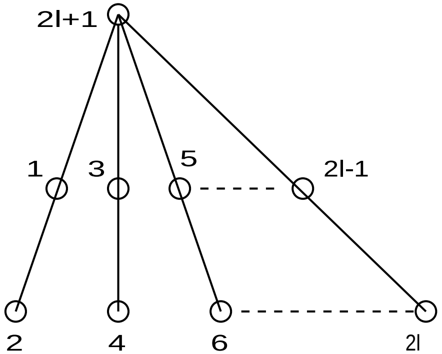
逆の対応も定まる

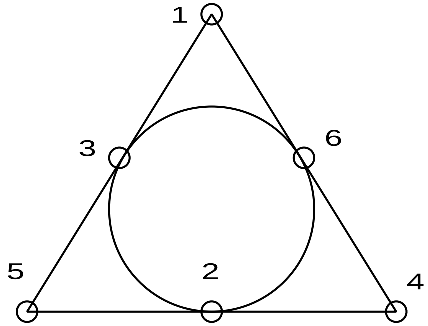
MAS：極大対蹠的部分集合

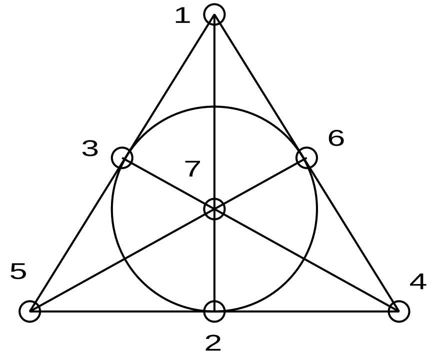
定理 $\mathbf{2(T.2013)}$ $\boldsymbol{k \leq 4}$ のとき、

$\binom{[n]}{k}$ の MAS の分類完成

$\boldsymbol{k = 3}$ の場合







$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ $(\boldsymbol{k} \leq 4)$ の $\mathbf{MAS}$ の分類に現れる
$\mathbf{MAS}$

$\downarrow$ 一般化

$\boldsymbol{k} > 4$ のときの $\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の $\mathbf{MAS}$

: 分類または性質を調べる

$$\boldsymbol{A(2, 2l)}$$

$$\boldsymbol{= \{\{1, 2\}, \ldots, \{2l - 1, 2l\}\} \subset \binom{[2l]}{2}}$$

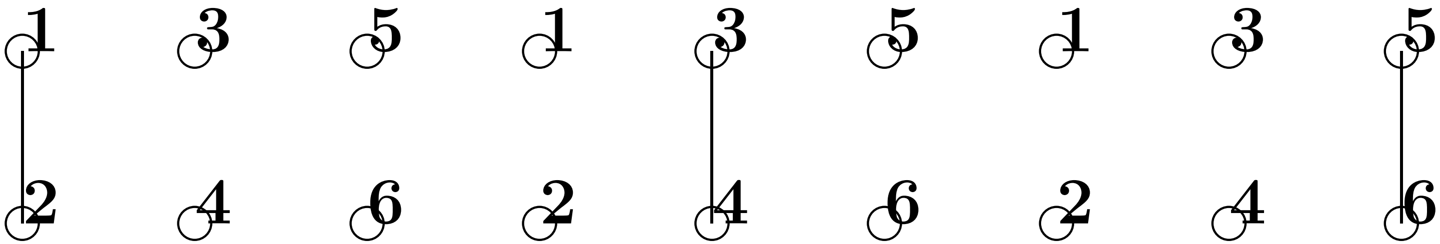
$$\boldsymbol{A(2k, 2l)}$$

$$\boldsymbol{= \left\{ \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha_i \in A(2, 2l) \\ \alpha_i \neq \alpha_j \end{matrix} \right\} \subset \binom{[2l]}{2k}}$$

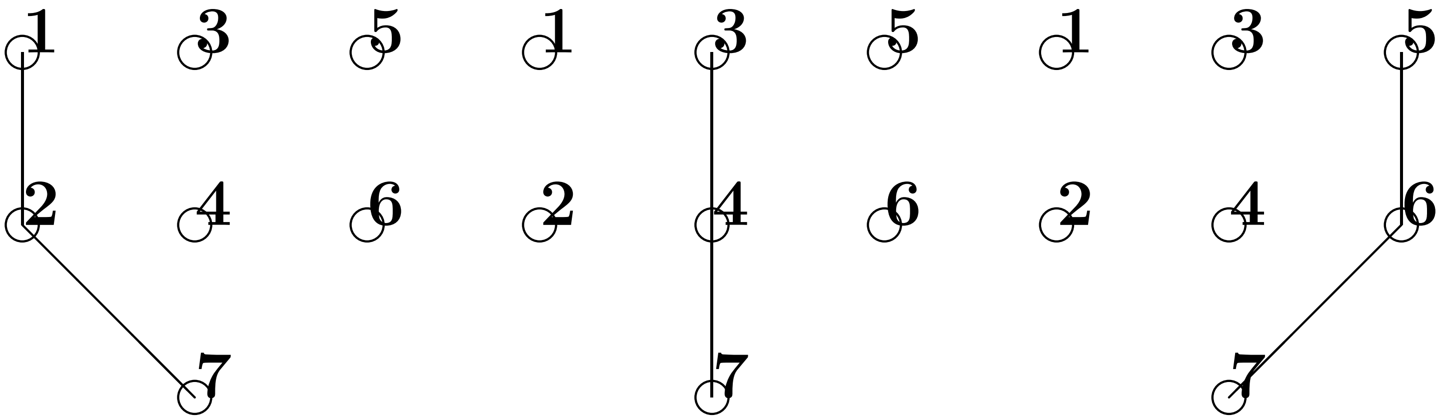
$$\boldsymbol{A(2k + 1, 2l + 1)}$$

$$\boldsymbol{= \{\alpha \cup \{2l + 1\} \mid \alpha \in A(2k, 2l)\} \subset \binom{[2l + 1]}{2k + 1}}$$

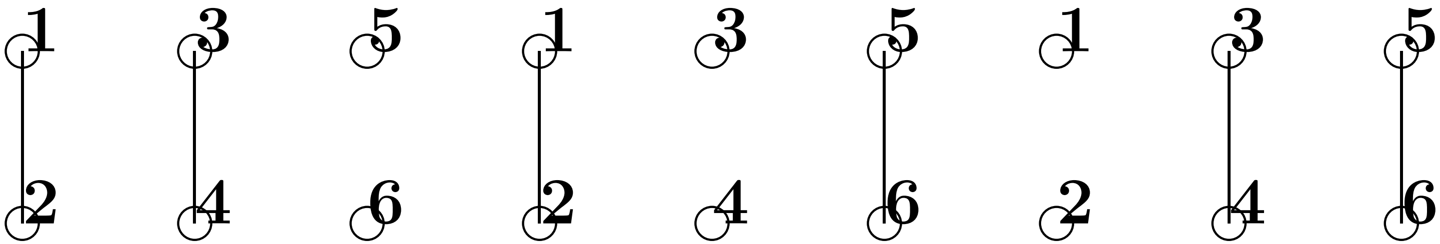
$$\boldsymbol{A(2,6)}$$



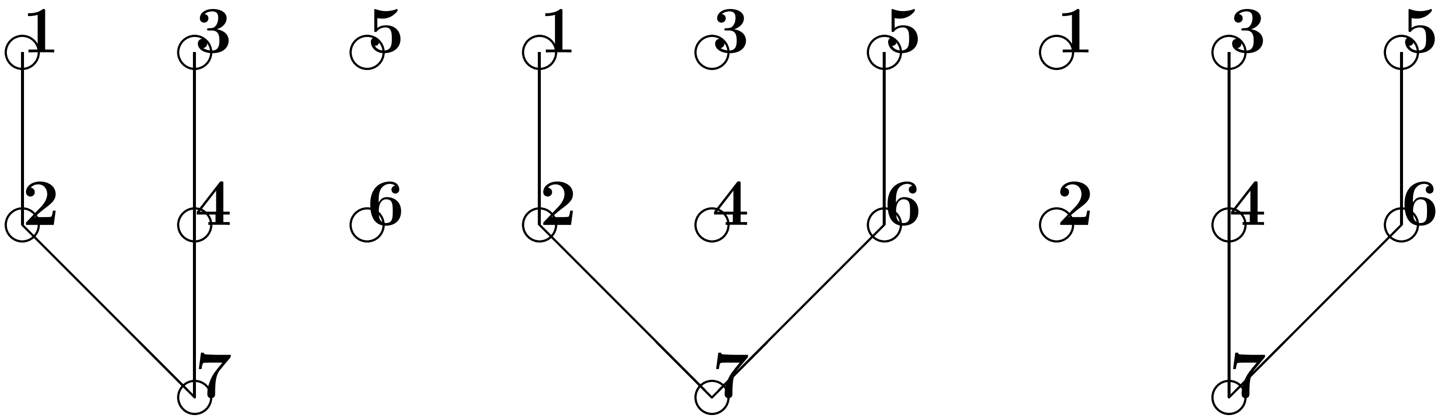
$$\boldsymbol{A(3,7) = \{\alpha \cup \{7\} \mid \alpha \in A(2,6)\}}$$



$\boldsymbol{A(4,6)}$



$\boldsymbol{A(5,7) = \{\alpha \cup \{7\} \mid \alpha \in A(4,6)\}}$



定理 $\mathbf{3(T.2014)}$

$\boldsymbol{A(2k,2l), A(2k+1,2l+1)}$: $\mathbf{AS}$

$\boldsymbol{l \geq 3k+1}$ のとき

$\boldsymbol{A(2k,2l)}$: $\mathbf{MAS\ in}$ $\boldsymbol{\binom{[2l]}{2k}, \binom{[2l+1]}{2k}}$

$\boldsymbol{A(2k+1,2l+1)}$

: $\mathbf{MAS\ in}$ $\boldsymbol{\binom{[2l+1]}{2k+1}, \binom{[2l+2]}{2k+1}}$

$\boldsymbol{l \geq 1}$のとき

$$\boldsymbol{A(2,2l)} : \textbf{MAS in } \binom{[2l]}{2}, \binom{[2l+1]}{2}$$

$$\boldsymbol{A(3,3)} : \textbf{MAS in } \binom{[3]}{3}, \binom{[4]}{3}$$

$$\boldsymbol{A(3,5)} : \textbf{MAS in } \binom{[5]}{3}$$

$$\textbf{not in MAS in } \binom{[6]}{3}$$

$$\boldsymbol{A(3,7)} : \textbf{not in MAS in } \binom{[7]}{3}$$

$\boldsymbol{l \geq 4 = 3 + 1}$のとき

$$\boldsymbol{A(3,2l+1)} : \textbf{MAS in } \binom{[2l+1]}{3}, \binom{[2l+2]}{3}$$

$\boldsymbol{A}(4,4)$: MAS in $\binom{[4]}{4}$, $\binom{[5]}{4}$

$\boldsymbol{A}(4,6)$: MAS in $\binom{[6]}{4}$

not MAS in $\binom{[7]}{4}$

$\boldsymbol{A}(4,8)$: not in MAS in $\binom{[8]}{4}$

$\boldsymbol{l} \geq 5$ のとき

$\boldsymbol{A}(4,2\boldsymbol{l})$: MAS in $\binom{[2l]}{4}$,$\binom{[2l+1]}{4}$

$$a(k,n) = \max\left\{|A| \;\middle|\; A : \text{ AS in } \binom{[n]}{k}\right\}$$

$$a(1,n) = 1 \qquad a(2,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$a(2k,n) \geq \left| A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right| = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k},$$

$$a(2k+1,n) \geq \left| A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)\right|$$

$$= \binom{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{k}.$$

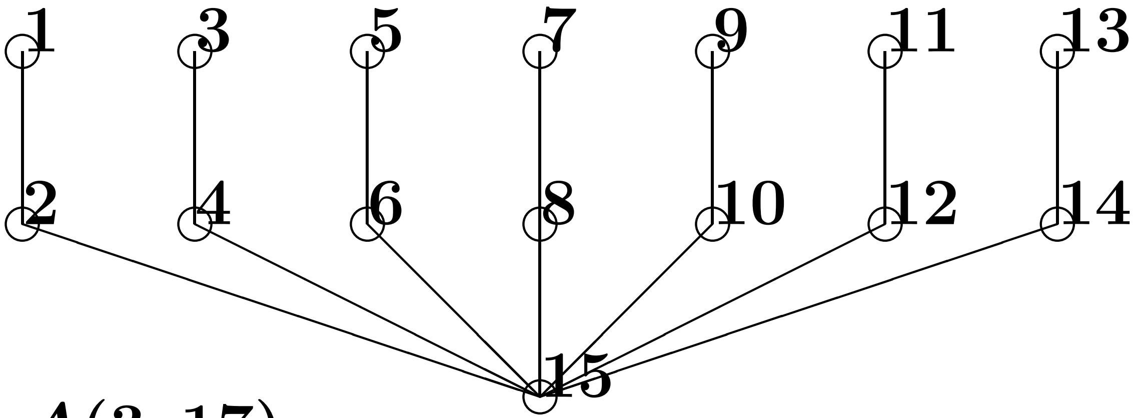
$\boldsymbol{k} \leq 4$ の場合の MAS の分類結果より

$$\boldsymbol{a(1,n) = 1, \quad a(2,n) = \lfloor n/2 \rfloor}$$

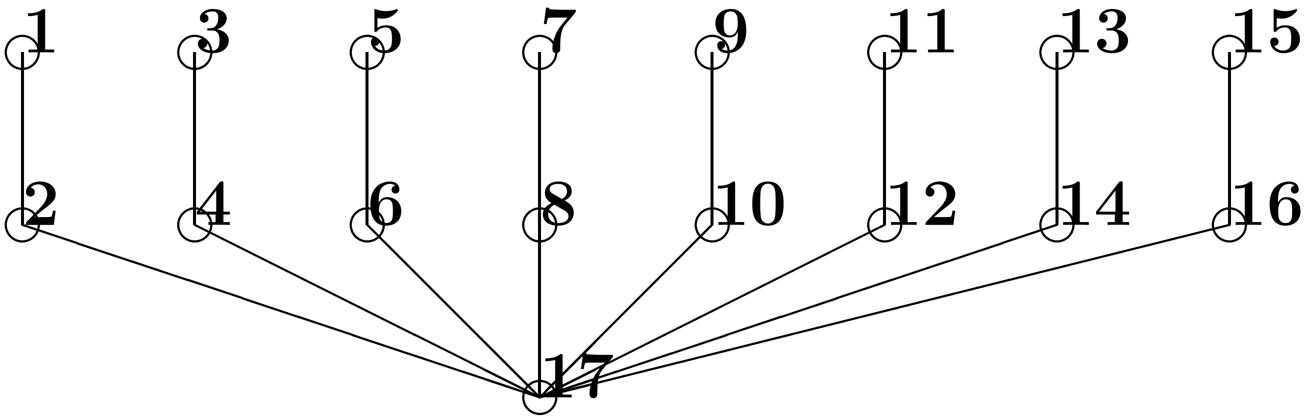
$\boldsymbol{n}$	4	5	6	7, . . . , 16	17 以上
$\boldsymbol{a(3,n)}$	1	2	4	7	$\boldsymbol{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$

$\boldsymbol{n}$	5	6	7	8, . . . , 11	12 以上
$\boldsymbol{a(4,n)}$	1	3	7	14	$\boldsymbol{\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}}$

$\boldsymbol{A(3,15)}$



$\boldsymbol{A(3,17)}$



定理 4(T.2015)

$$n \geq 87 \Rightarrow a(5,n) = \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{2}$$

$\binom{[n]}{5}$ の大対蹠集合

$$: A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)$$ と合同

次が成り立つことが期待される

k に対して n が十分大きい $\Rightarrow$

$\binom{[n]}{k}$ の大対蹠集合は $A(2k', 2n')$ または

$A(2k'+1, 2n'+1)$ に合同

定理 5(Frankl-徳重 2016)

$\boldsymbol{k}$: 自然数、$\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{k}$ に対して十分大きいとき、

$$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}} \text{の大対蹠集合} : \boldsymbol{A(k,l)} \text{ に合同}$$

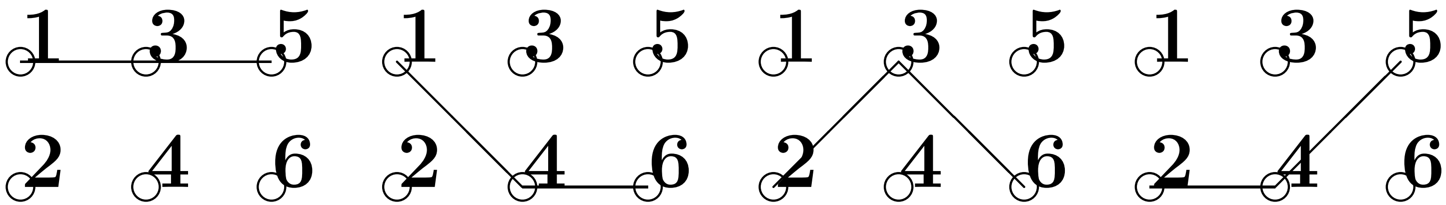
ただし、$\boldsymbol{k}$ が奇数のとき $\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{n}$ 以下の最大奇数であり、$\boldsymbol{k}$ が偶数のとき $\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{n}$ 以下の最大偶数である。

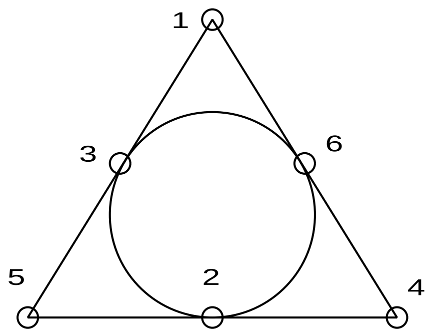
$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{n}$ があまり大きくない $\binom{[n]}{k}$ を考える

$\boldsymbol{Ev_{2m}} = \{\{\boldsymbol{\alpha}(1), \ldots, \boldsymbol{\alpha}(m)\} \mid$

$\quad \boldsymbol{\alpha}(i) \in \{2i-1, 2i\}$, 偶数の $\boldsymbol{\alpha}(i)$ は偶数個 $\}$

とおくと $\boldsymbol{Ev_{2m}} \subset \binom{[2m]}{m}$. 次は $\boldsymbol{Ev_6}$





定理 $\mathbf{6(T.2014)}$

$\mathbf{(1)}$ $\boldsymbol{2m \equiv 2,4,6(\mathrm{mod}8)}$ のとき、

$\boldsymbol{Ev_{2m}}$: $\binom{[2m]}{m}$ の $\mathbf{MAS}$

$\mathbf{(2)}$ $\boldsymbol{Ev_{8m}}$: $\binom{[8m]}{4m}$ の $\mathbf{MAS}$ ではない

$\boldsymbol{Ev_{8m} \cup A(4m,8m)}$: $\binom{[8m]}{4m}$ の

$\mathbf{MAS}$

前ページの定理の(2)のMASを参考に

対蹠集合を定める準備

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$: 集合 $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y} = \emptyset$

$\boldsymbol{A} \subset \binom{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{B} \subset \binom{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{l}}$ に対して

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{B}\}$$

$$\subset \binom{\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l}}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m} = Ev_{8m} \cup A(4m, 8m),}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+2} = Ev_{8m+2} \cup}$$

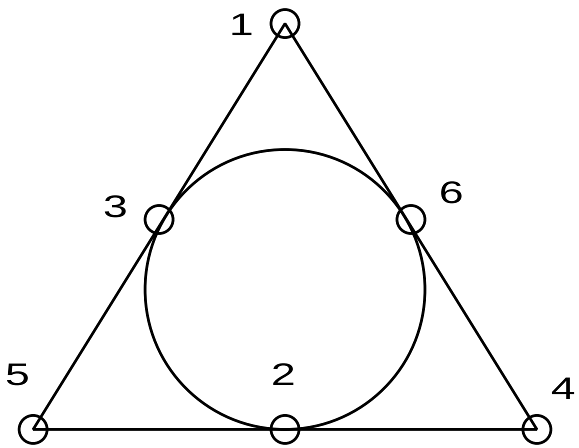
$$\boldsymbol{A(4m-2, 8m+2) \times \{\{8m+3, 8m+4, 8m+5\}\},}$$

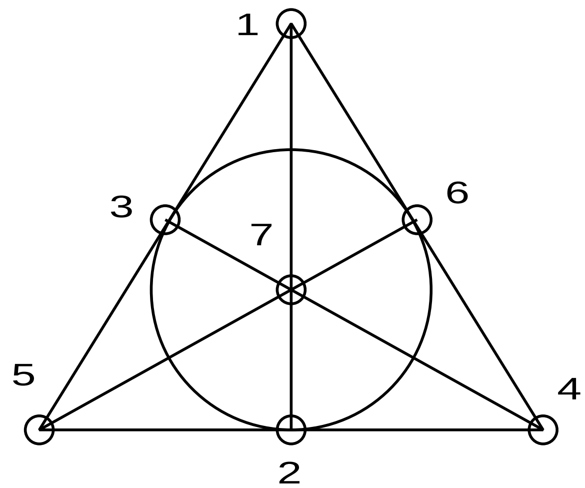
$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+4} = Ev_{8m+4} \cup}$$

$$\boldsymbol{A(4m, 8m+4) \times \{\{8m+5, 8m+6\}\},}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+6} = Ev_{8m+6} \cup A(4m+2, 8m+6) \times \{\{8m+7\}\}.}$$

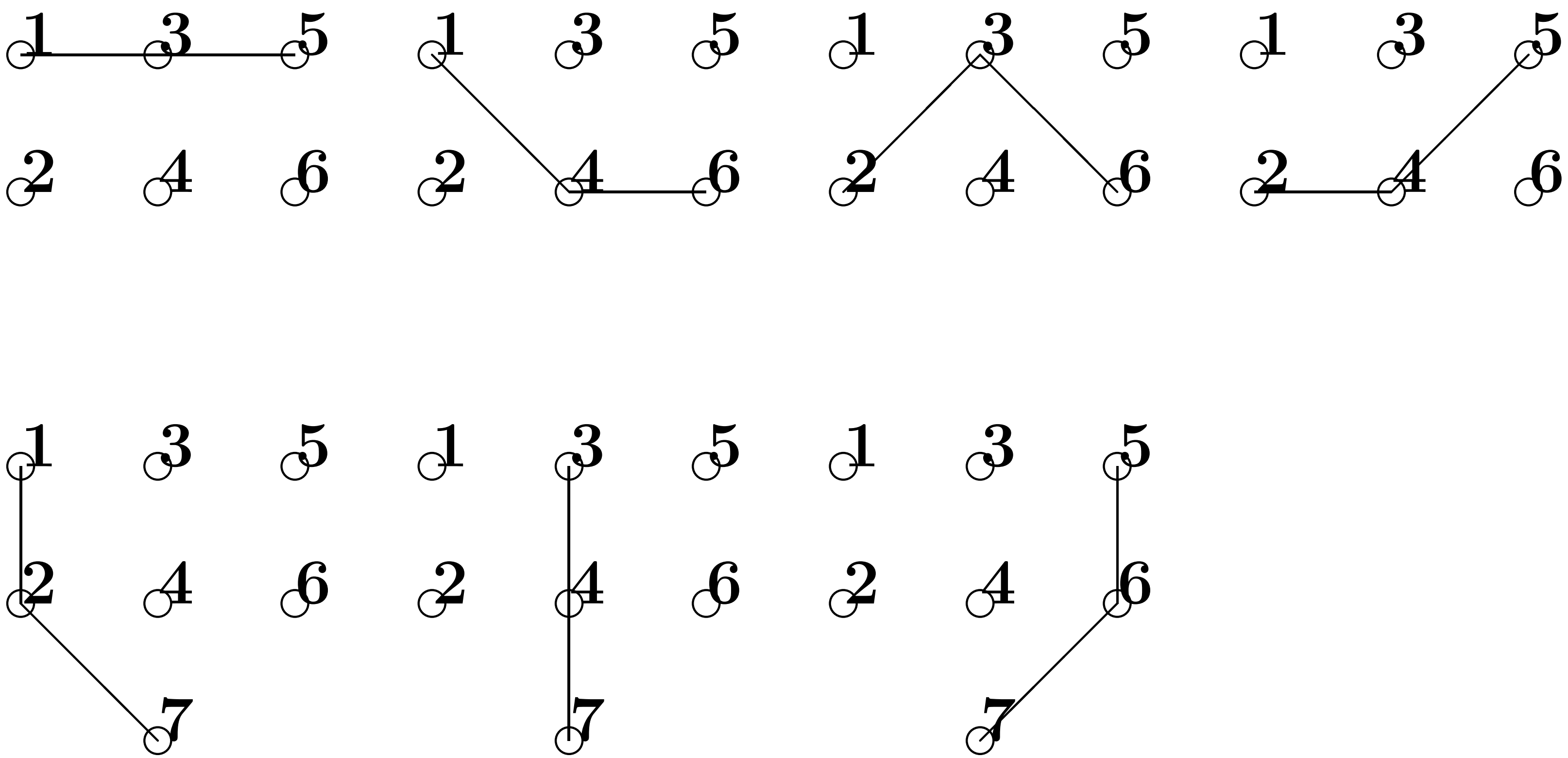
$\boldsymbol{Ev_6}$ と $\boldsymbol{Ev_6^+}$





これらは $\binom{[\mathbf{6}]}{\mathbf{3}}$ と $\binom{[\mathbf{7}]}{\mathbf{3}}$ 内の $\mathbf{MAS}$ の分類に現れる。

Ev_6 と Ev_6^+

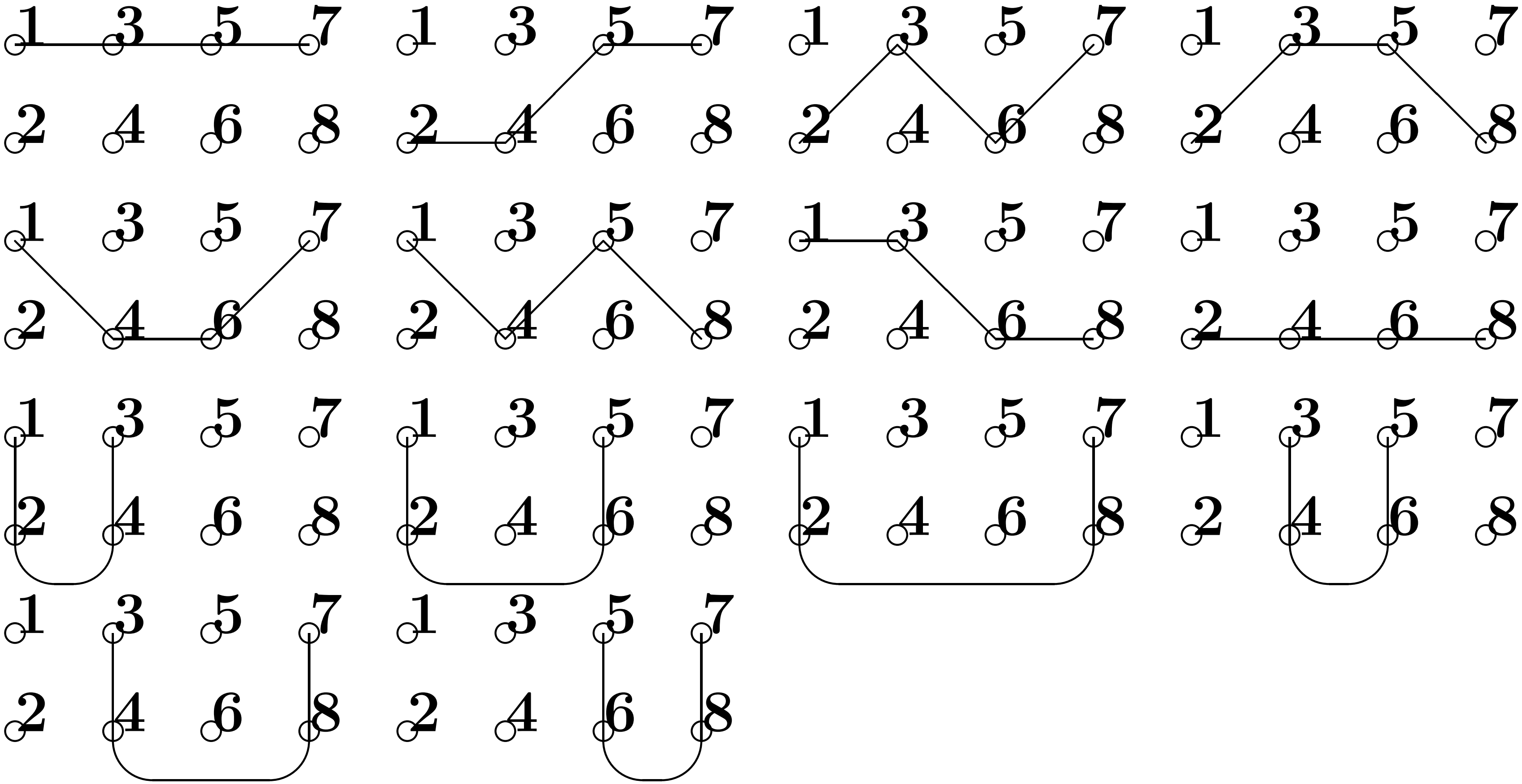


定理 7(T.)　以下は $\binom{[n]}{k}$ の MAS である。

$k \backslash n$	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$
$4m$	Ev^{+}_{8m}	Ev^{+}_{8m}	Ev^{+}_{8m}	Ev^{+}_{8m}
$4m+1$			Ev_{8m+2}	Ev_{8m+2}

$k \backslash n$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
$4m+1$	Ev_{8m+2}	Ev^{+}_{8m+2}		
$4m+2$	Ev_{8m+4}	Ev_{8m+4}	Ev^{+}_{8m+4}	
$4m+3$			Ev_{8m+6}	Ev^{+}_{8m+6}

Ev_8 と Ev_8^+


1 3 5 7 1 3 5 7 1 3 5 7 1 3 5 7
2 4 6 8 2 4 6 8 2 4 6 8 2 4 6 8
1 3 5 7 1 3 5 7 1 3 5 7 1 3 5 7
2 4 6 8 2 4 6 8 2 4 6 8 2 4 6 8
1 3 5 7 1 3 5 7 1 3 5 7 1 3 5 7
2 4 6 8 2 4 6 8 2 4 6 8 2 4 6 8
1 3 5 7 1 3 5 7
2 4 6 8 2 4 6 8

$\boldsymbol{Ev_*}$ と $\boldsymbol{A(*,**)}$ の組合せ

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{Ev_*^+}$ を含む対蹠集合の系列の構成

$$\boldsymbol{Ev_{8m}^+ \subset Ev_{8m}^{+(l_1,l_2)} \subset \binom{[n]}{4m}},$$

$$\boldsymbol{Ev_{8m+2}^+ \subset Ev_{8m+2}^{+l} \subset \binom{[n]}{4m+1}},$$

$$\boldsymbol{Ev_{8m+4}^+ \subset Ev_{8m+4}^{+(l_1,l_2)} \subset \binom{[n]}{4m+2}},$$

$$\boldsymbol{Ev_{8m+6}^+ \subset Ev_{8m+6}^{+l} \subset \binom{[n]}{4m+3}}.$$

これら対蹠集合の系列：現在調査中

真に含む対蹠集合は存在しない

$$\boldsymbol{Ev_2} = \{\{\mathbf{1}\}\} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\mathbf{1}},$$

$$\boldsymbol{Ev_6^+} \subset \binom{[\mathbf{7}]}{\mathbf{3}}.$$

4　スピノル群の極大対蹠部分群

スピノル群：回転群の普遍被覆群

$\boldsymbol{Spin(n)}$: $\boldsymbol{SO(n)}$ の普遍被覆群

$\boldsymbol{Cl(\mathbb{R}^n)}$: **Clifford** 代数

$\boldsymbol{Spin(n) \subset Cl(\mathbb{R}^n)}$

$$F(n) = \bigcup_{k=0}^{\lfloor n/4 \rfloor} \binom{[n]}{4k}$$

$\alpha, \beta \in F(n)$ に対して

$\alpha \backslash \beta = \{ i \in \alpha \mid i \notin \beta \}$

α, β : 対蹠的 $\Leftrightarrow$ $|\alpha \backslash \beta|$: 偶数

$A \subset F(n)$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow$ α, β : 対蹠的 $(\forall \alpha, \beta \in A)$

$\boldsymbol{Spin(n)}$ の極大対蹠部分群の分類 $\mathbf{(1)}$

$\leftrightarrow$ $\boldsymbol{F(n)}$ の極大対蹠的集合の分類 $\mathbf{(2)}$

対蹠部分群 $=$ 基本可換 $\mathbf{2}$ 部分群

$\mathbf{(1)}$ $\leftrightarrow$ 代数的位相幾何学

$\mathbf{(2)}$ $\leftrightarrow$ 符号理論