コンパクト型Hermite対称空間の二つの実形の対のFloerホモロジー群

入江　博[*]

東京電機大学未来科学部

概 要

単調なコンパクト型 Hermite 対称空間 M の互いに合同とは限らない 2 つの実形 L_0, L_1 に対して、各々の最小 Maslov 数が 3 以上という条件のもとで、$\mathbb{Z}_2$ 係数の Floer ホモロジー群 $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を計算する。特に、M が既約の場合には単調性および最小 Maslov 数の仮定は自動的にみたされ、Oh の先行結果 [5] を含む Arnold-Givental 不等式の一般化が得られる。本稿の内容は、筑波大学の田崎博之氏、首都大学東京の酒井高司氏との共同研究 [3] に基づいている。

偶数次元の多様体 M とその上の非退化な閉 2 次微分形式 ω の組 (M, ω) を**シンプレクティック多様体**、M の半分次元の部分多様体 L で ω の L への制限が 0 になるとき、L を **Lagrange 部分多様体**という。M の例としては、多様体 X の余接束 T^*X やケーラー多様体がある。L の例としては、T^*X の零切断とファイバー、ケーラー多様体 (M, J, ω) の対合的な反正則等長変換の固定点集合などが考えられる。次に述べる予想は、大域シンプレクティック幾何学の中心的な手法である Floer ホモロジー理論の発展を促す原動力の一つであった。

予想 1 (Arnold-Givental). (M, ω) をシンプレクティック多様体、L を M の反シンプレクティックな対合による固定点集合とする。L は空でなくコンパクトであると仮定する[1]。このとき、L と ϕL が横断的に交わるような M の任意の Hamilton 微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について、不等式

$$\#(L \cap \phi L) \geq SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ。ここで、$SB(L, \mathbb{Z}_2)$ は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の総和を表す。 □

この予想は、深谷-Oh-太田-小野の研究 [2] により完全な解決に肉薄しているが、ここでは、後の話に関係する Oh による結果を紹介する。

定理 2 (Oh [5]). (M, J_0, ω) を既約な[2]コンパクト型 Hermite 対称空間とし、σ を M の対合的な反正則等長変換とする。M の実形 $L = \mathrm{Fix}(\sigma)$ について Arnold-Givental 予想は正しい。

[*]hirie@im.dendai.ac.jp

[1] L は Lagrange 部分多様体になる。

[2] [2] により、既約性の仮定は不要になった。

Arnold-Givental 予想は、Lagrange 部分多様体 L とその Hamilton 微分同相による像 ϕL との交点数の評価に関するものだが、これを拡張して Lagrange 部分多様体 L_0 とそれと Hamilton 同位とは限らない Lagrange 部分多様体 L_1 に関して交叉 $L_0 \cap \phi L_1$ を考察することは自然な問題である。実は、定理 2 を導く際に用いる Floer ホモロジーの理論はこの場合も扱えるように構成されている。ところが、L_0 と L_1 が Hamilton 同位でない場合の具体的な計算は最近まで困難であった。最初の具体的結果は G. Alston により 2008 年に得られた。

定理 3 (Alston). 複素射影空間 $(\mathbb{C}P^n, J_0, \omega_{FS})$ の 2 つの Lagrange 部分多様体である実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と Clifford トーラス T^n を考える。$n = 2k-1$ とする。このとき、$\mathbb{R}P^n$ と ϕT^n が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(\mathbb{C}P^n, \omega_{FS})$ について、

$$\#(\mathbb{R}P^n \cap \phi T^n) \geq 2^k$$

が成り立つ。ここで、$T^n = \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid |z_0| = \cdots = |z_n|\}$ である。

この研究を出発点として、現在トーリック Fano 多様体での交点数 $\#(L_0 \cap \phi L_1)$ の評価について組織的な研究が進んでいる。一方、我々は Aronld-Givental 不等式の観点からコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の対に着目する。

(M, J_0, ω) をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の部分多様体 L が次の条件をみたすとき、L を M の**実形**と呼ぶ。ある対合的反正則等長変換 $\sigma : M \to M$ が存在し

$$L = \{x \in M \mid \sigma(x) = x\}$$

が成り立つ。実形 L は M の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。M の正則等長変換の単位連結成分を $I_0(M)$ と表す。M の 2 つの部分集合 A と B が**合同である**とは、ある $g \in I_0(M)$ が存在して、$B = gA$ をみたすこととする。このとき, $I_0(M) \subset \mathrm{Ham}(M, \omega) = \mathrm{Symp}_0(M, \omega)$ である[3]。ここで、$\mathrm{Symp}_0(M, \omega) := \{\phi \in \mathrm{Diff}_0(M) \mid \phi^*\omega = \omega\}$ である。実形 $L = \mathrm{Fix}(\sigma)$ に対して、M の正則等長変換 g を考えると、$gL = \mathrm{Fix}(g\sigma g^{-1})$ も M の実形である。

Riemann 対称空間 M の点 x に関する点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は次の条件をみたすとき、**対蹠集合**という。S のすべての点 x, y に対して $s_x y = y$ が成り立つ。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい、$\#_2 M$ で表す。$\#_2 M$ を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-長野 [1] が導入した。竹内は、Hermite 対称空間の実形を分類し、それらは対称 R 空間であることを証明した。同じく竹内は、L が対称 R 空間ならば

$$\#_2 L = SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

[3]一般に、恒等写像とイソトピックなシンプレクティック微分同相はハミルトン微分同相であるとは限らないが、コンパクト型 Hermite 対称空間 M については、$\pi_1(M) = \{1\}$ であることから両者は一致する。

が成り立つことを証明した。したがって、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形 L については、$\#_2 L = SB(L, \mathbb{Z}_2)$ が成り立つ。

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の二つの実形 L_0, L_1 を考える。田中-田崎 [6, Theorem 1.1] により、L_0, L_1 が横断的に交わるならば $L_0 \cap L_1$ は M の対蹠集合になる。さらに、片方の L_1 を $g \in I_0(M)$ で写した場合、L_0 と gL_1 が横断的に交わる限り交点数 $\#(L_0 \cap gL_1)$ は一定であることも示されている。これらの事実は、次の主結果の証明に本質的に用いられる。

定理 4 ([3]). (M, J_0, ω) を**単調な**[4]コンパクト型 Hermite 対称空間とする。L_0, L_1 を M の横断的に交わる 2 つの実形で、最小 Maslov 数はともに 3 以上と仮定する。このとき、

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p]$$

が成り立つ。つまり、交叉 $L_0 \cap L_1$ そのものが Floer ホモロジー群 $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の生成元となる。

とくに、M が既約の場合には最小 Maslov 数についての仮定は自動的にみたされ、また、田中-田崎 [6, Section 5] の結果を用いてより詳しい情報がわかる。

定理 5 ([3]). M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_0, L_1 を M の横断的に交わる 2 つの実形とする。このとき、

(1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり、L_0 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_1 は $U(2m)$ と合同ならば、

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^m}$$

が成り立つ。ここで、$2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_0 < 2^{2m} = \#_2 L_1$ である。

(2) それ以外の場合には

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{\#_2 L_0, \#_2 L_1\}}$$

が成り立つ。

前述の竹内の結果と $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の Hamilton 同位に関する不変性より、

系 6 (一般化された Arnold-Givental 不等式 [3]). M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_0, L_1 を定理 5 の (1) の場合以外の M の 2 つの実形とする。このとき、L_0 と ϕL_1 が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相 $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について、

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \min\{SB(L_0, \mathbb{Z}_2), SB(L_1, \mathbb{Z}_2)\} \tag{1}$$

が成り立つ。

[4] この状況では、Kähler-Einstein であることと同値である (詳しくは [3] を参照)。

(1) は既約コンパクト型 Hermite 対称空間の Oh による Arnold-Givental 不等式 (定理 2) の一般化とみなせる。また、定理 4, 5 は、Oh が [4, Section 6] で言及しているひとつの問題のほぼ完全な解答になっている。

注意 7. 下の表は、既約コンパクト型 Hermite 対称空間とその実形をまとめたものであり、定理 5 と系 6 の適用範囲を表す。複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の場合、実形はすべて $\mathbb{R}P^n$ と合同であるから、適用範囲は定理 2 と同じ。ところが、例えば複素 2 次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の場合は、合同類の数が次元に関して増大し適用範囲は大きく広がる。

M	L_0	L_1
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$
$G_{2q}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2m+2q})$	$G_q^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{m+q})$	$G_{2q}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2m+2q})$
$G_n^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	$G_n^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$
$G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$	$G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$	$U(2m)$
$Sp(2m)/U(2m)$	$Sp(m)$	$U(2m)/O(2m)$
$SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)/Sp(m)$	$SO(2m)$
$E_6/T \cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	$G_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^4)/\mathbb{Z}_2$
$E_7/T \cdot E_6$	$T \cdot (E_6/F_4)$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$

ここで、$S^{k,n-k} = (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$ である。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[2] K. Fukaya, Y.-G.Oh, H. Ohta and K. Ono, *Floer theory of Lagrangian submanifolds over* $\mathbb{Z}$, preprint.

[3] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, preprint (2011).

[4] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993.

[5] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.

[6] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, preprint (2010).