有向実Grassmann多様体の極大対蹠集合

北九州ワークショップ
「幾何学と組合せ論」

田崎博之

筑波大学数理物質系

2017年3月11日

定義 (Chen-長野)

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$x, y \in M$: 対蹠的 $\Leftrightarrow s_x(y) = y$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ x, y$: 対蹠的

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow |S|$: 最大値

X : 集合

$\binom{X}{k} = \{\alpha \subset X \mid |\alpha| = k\}$

$[n] = \{1, \ldots, n\}$

$\alpha, \beta \in \binom{[n]}{k}$ に対して

$\alpha \backslash \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\}$

α, β : 対蹠的 $\Leftrightarrow$ $|\alpha \backslash \beta|$: 偶数

$A \subset \binom{[n]}{k}$: 対蹠的

$\Leftrightarrow$ α, β : 対蹠的 $(\forall \alpha, \beta \in A)$

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$

　：$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元有向部分空間全体

$SO(n)$ 不変 Riemann 計量により

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ ：Riemann 対称空間

定理 1(T.2013)

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の分類

$\leftrightarrow \binom{[n]}{k}$ の極大対蹠的部分集合の分類

　(正規直交基底の元の選び方)

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$: $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$\boldsymbol{A}$: $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠的部分集合

$\Rightarrow \{\pm\langle \boldsymbol{e}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\alpha(k)}\rangle_{\mathbb{R}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}\}$

: $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合

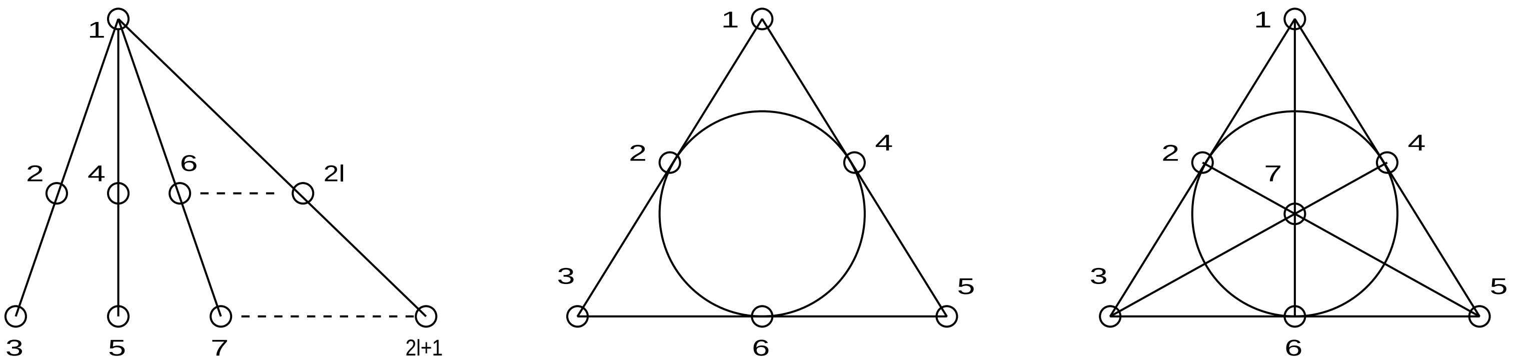
逆の対応も定まる

MAS：極大対蹠的部分集合

定理 2(T.2013)　$\boldsymbol{k} \leq 4$ のとき、

$\binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$ の MAS の分類完成

$\boldsymbol{k} = 3$ の場合



$\binom{[n]}{k}$ $(k \leq 4)$ の MAS の分類に現れる MAS

$\downarrow$ 一般化

$k > 4$ のときの $\binom{[n]}{k}$ の MAS

：分類または性質を調べる

$$A(2,2l) = \{\{1,2\},\{3,4\},\dots,\{2l-1,2l\}\}$$
$$\subset \binom{[2l]}{2}$$

$$A(2k,2l)$$
$$= \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \mid \alpha_i \in A(2,2l), \alpha_i \neq \alpha_j\}$$
$$\subset \binom{[2l]}{2k}$$

$$A(2k+1,2l+1)$$
$$= \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k,2l)\}$$
$$\subset \binom{[2l+1]}{2k+1}$$

定理 $\mathbf{3(T.2014)}$

$\boldsymbol{A(2k,2l), A(2k+1,2l+1)}$: $\mathbf{AS}$

$\boldsymbol{l \geq 3k+1}$ のとき

$\boldsymbol{A(2k,2l)}$: $\mathbf{MAS\ in}\ \boldsymbol{\binom{[2l]}{2k}, \binom{[2l+1]}{2k}}$

$\boldsymbol{A(2k+1,2l+1)}$

: $\mathbf{MAS\ in}\ \boldsymbol{\binom{[2l+1]}{2k+1}, \binom{[2l+2]}{2k+1}}$

$$\boldsymbol{a(k,n) = \max\left\{|A| \;\middle|\; A:\ \textbf{AS in } \binom{[n]}{k}\right\}}$$

$$\boldsymbol{a(1,n) = 1 \qquad a(2,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} a(2k,n) &\geq \left| A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right| = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k}, \\ a(2k+1,n) &\geq \left| A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)\right| \\ &= \binom{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{k}. \end{aligned}}$$

$k \le 4$の場合の分類結果より

$$a(1,n) = 1, \quad a(2,n) = \lfloor n/2 \rfloor$$

n	4	5	6	$7, \ldots, 16$	17以上
$a(3,n)$	1	2	4	7	$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

n	5	6	7	$8, \ldots, 11$	12以上
$a(4,n)$	1	3	7	14	$\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}$

定理 $\mathbf{4(T.2015)}$

$$\boldsymbol{n \geq 61 \Rightarrow a(5,n) = \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{2}}$$

$\boldsymbol{A \subset \binom{[n]}{5}}$: 対蹠的、$\boldsymbol{|A| = \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{2}}$

$\boldsymbol{\Rightarrow A : A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)}$ と合同

次が成り立つことが期待される

$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{n}$ が十分大きい $\Rightarrow$

$\boldsymbol{\binom{[n]}{k}}$ の大対蹠集合は $\boldsymbol{A(2k', 2n')}$ または

$\boldsymbol{A(2k'+1, 2n'+1)}$ に合同

定理 5(Frankl-徳重 2016)

$\boldsymbol{k}$ ： 偶数、$\boldsymbol{n}$ ： 十分大きい、

$\boldsymbol{l}$ ： $\boldsymbol{n}$ 以下の最大偶数

$$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}} \text{の大対蹠集合：} \boldsymbol{A(l,k)} \text{ に合同}$$

$\boldsymbol{k}$ ： 奇数、$\boldsymbol{n}$ ： 十分大きい、

$\boldsymbol{l}$ ： $\boldsymbol{n}$ 以下の最大奇数

$$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}} \text{の大対蹠集合：} \boldsymbol{A(l,k)} \text{ に合同}$$

$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{n}$ があまり大きくない $\binom{[n]}{k}$ を考える

$\boldsymbol{Ev_{2m} = \{\{\alpha(1), \ldots, \alpha(m)\} \mid}$
$\boldsymbol{\alpha(i) \in \{2i-1, 2i\}}$, 偶数の $\boldsymbol{\alpha(i)}$ は偶数個 $\boldsymbol{\}}$
とおくと $\boldsymbol{Ev_{2m} \subset \binom{[2m]}{m}}$.

定理 $\mathbf{6(T.2014)}$

$\mathbf{(1)}$ $\boldsymbol{2m \equiv 2, 4, 6 (\mathrm{mod} 8)}$ のとき、

$\boldsymbol{Ev_{2m} : \binom{[2m]}{m}}$ の $\mathbf{MAS}$

$\mathbf{(2)}$ $\boldsymbol{Ev_{8m} : \binom{[8m]}{4m}}$ の $\mathbf{MAS}$ ではない

$\boldsymbol{Ev_{8m} \cup A(4m, 8m) : \binom{[8m]}{4m}}$ の $\mathbf{MAS}$

前ページの定理の (2) の MAS を参考に

対蹠集合を定める準備

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$: 集合 $\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y} = \emptyset$

$\boldsymbol{A} \subset \binom{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{B} \subset \binom{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{l}}$ に対して

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{\alpha} \cup \boldsymbol{\beta} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{B}\}$$
$$\subset \binom{\boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l}}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m} = Ev_{8m} \cup A(4m, 8m),}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+2} = Ev_{8m+2} \cup}$$

$$\boldsymbol{A(4m-2, 8m+2) \times \{\{8m+3, 8m+4, 8m+5\}\},}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+4} = Ev_{8m+4} \cup}$$

$$\boldsymbol{A(4m, 8m+4) \times \{\{8m+5, 8m+6\}\},}$$

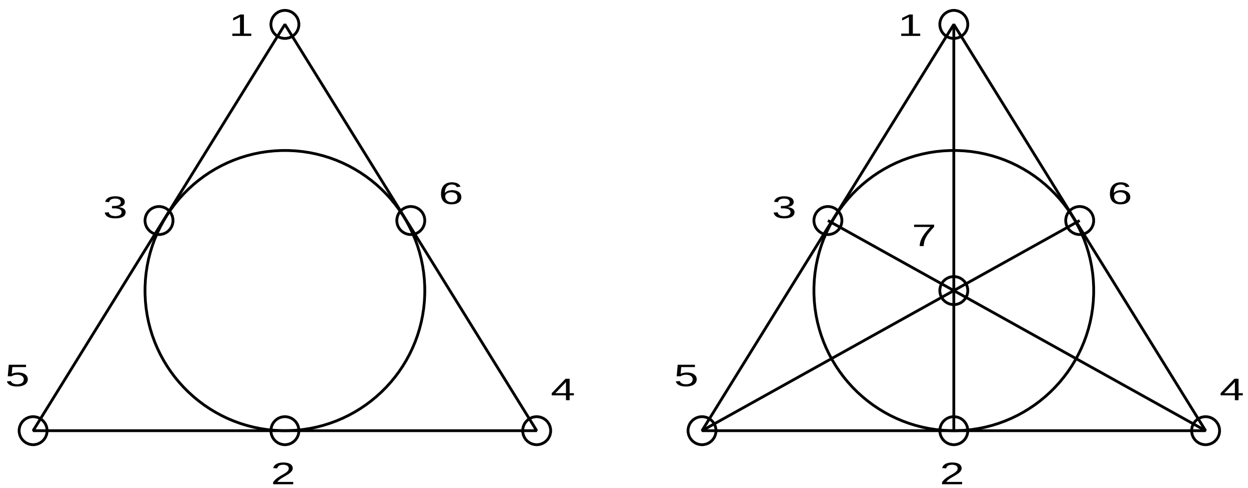
$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+6} = Ev_{8m+6} \cup A(4m+2, 8m+6) \times \{\{8m+7\}\}.}$$

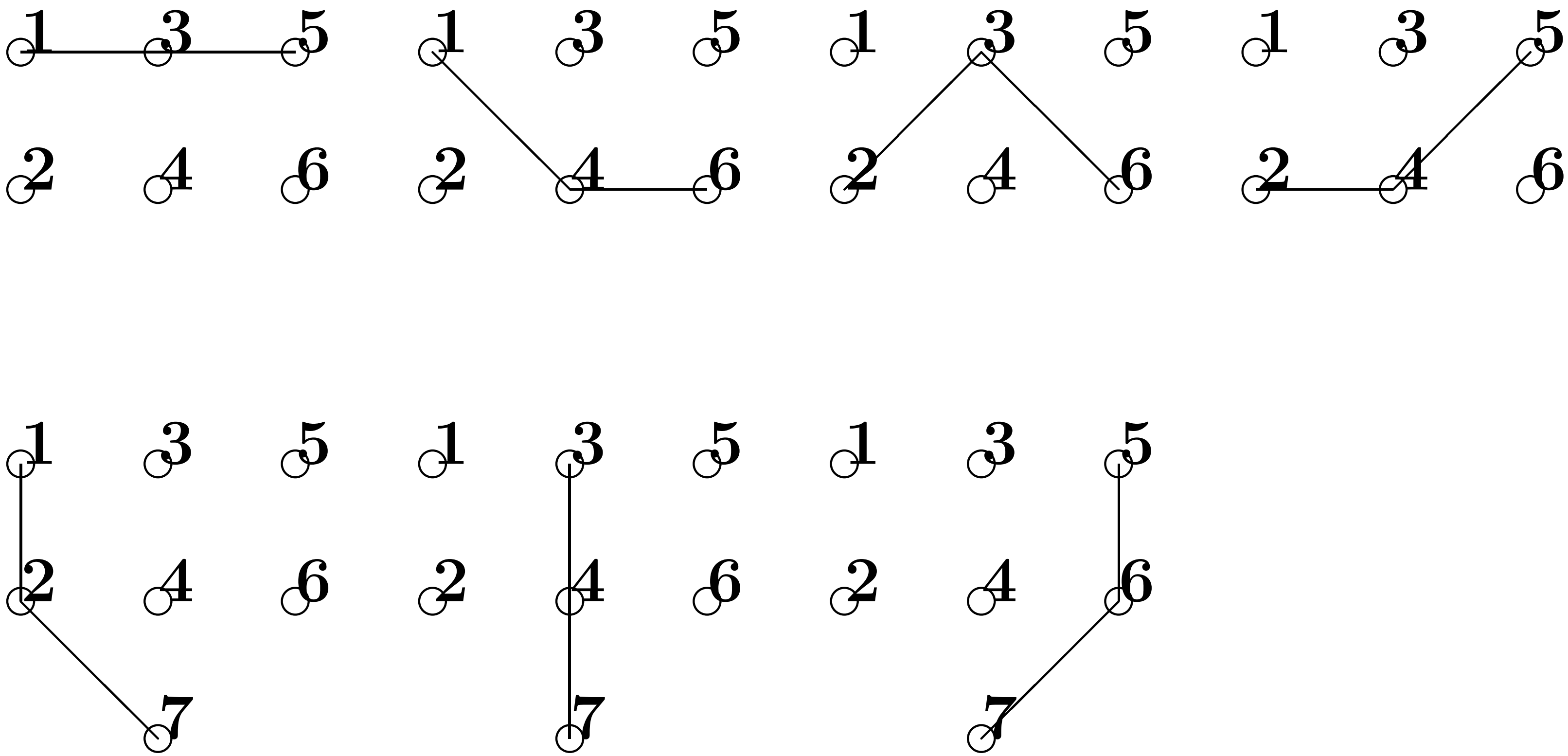
定理 7(T.)　以下は $\binom{[n]}{k}$ の MAS である。

$k \backslash n$	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$
$4m$	Ev^+_{8m}	Ev^+_{8m}	Ev^+_{8m}	Ev^+_{8m}
$4m+1$			Ev_{8m+2}	Ev_{8m+2}

$k \backslash n$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
$4m+1$	Ev_{8m+2}	Ev^+_{8m+2}		
$4m+2$	Ev_{8m+4}	Ev_{8m+4}	Ev^+_{8m+4}	
$4m+3$			Ev_{8m+6}	Ev^+_{8m+6}

$\boldsymbol{Ev_6}$ と $\boldsymbol{Ev_6^+}$




1 3 5 1 3 5 1 3 5 1 3 5
2 4 6 2 4 6 2 4 6 2 4 6
1 3 5 1 3 5 1 3 5
2 4 6 2 4 6 2 4 6
7 7 7