古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合
—田中真紀子さんとの共同研究—

ワークショップ
「幾何学と組合せ論2019」

田崎博之

筑波大学数理物質系

2019年3月9日

定義 (Chen-長野)

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$x, y \in M$: 対蹠的 $\Leftrightarrow s_x(y) = y$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\quad \Leftrightarrow \forall x, y \in S \ x, y$: 対蹠的

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow |S|$: 最大値

$\#_2 M$: 大対蹠集合の濃度 2-number

例 (1) $M = S^n$ $(\subset \mathbb{R}^{n+1})$：球面

$x \in S^n$, $\{x, -x\}$ は大対蹠集合,

$\#_2 S^n = 2$

(2) $M = \mathbb{R}P^n$：実射影空間

$e_1, \ldots, e_{n+1}$： $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底

$\{\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}, \ldots, \langle e_{n+1} \rangle_{\mathbb{R}}\}$：大対蹠集合,

$\#_2 \mathbb{R}P^n = n + 1$

(3) M : コンパクトLie群

両側不変計量が存在

$s_x(y) = xy^{-1}x$ により M は対称空間

$e \in A$: 極大対蹠集合 $\Rightarrow$ A : 部分群

A : $\mathbb{Z}_2$ の積に同型

極大対蹠集合:極大対蹠部分群に帰着

このような部分群 : Borel-Serre

Chen-長野はこれを対称空間に拡張

(4) 古典型コンパクトLie群の場合

$\boldsymbol{\Delta}_n = \{\mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1) \in \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n})\}$

$\boldsymbol{O}(\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{n})$ の大対蹠部分群,

$\#_2 \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}) = \#_2 \boldsymbol{U}(\boldsymbol{n}) = \#_2 \boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{n})$

$= \boldsymbol{2}^{\boldsymbol{n}}$

$\boldsymbol{\Delta}_n^+ = \{\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{\Delta}_n \mid \det \boldsymbol{d} = 1\}$

$\boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n})$, $\boldsymbol{SU}(\boldsymbol{n})$ の大対蹠部分群,

$\#_2 \boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n}) = \#_2 \boldsymbol{SU}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{2}^{\boldsymbol{n}-1}$

上記は対角化等により得られる。

基本的なコンパクト対称空間 (対称 R 空間) の対蹠集合: よくわかっている

それ以外のコンパクト対称空間の対蹠集合を理解したい

有向実 Grassmann 多様体：2017 年の講演

古典型コンパクト対称空間とその商空間：今回

基本的な空間の極大対蹠集合 (MAS) の分類結果とその証明の方針を述べる。

二面体群

$$D[4] := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

n を分解する： $n = 2^k \cdot l,\ l$ は奇数

$0 \leq s \leq k$ なる s に対して

$$D(s, n) := \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s}$$

$$= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0$$

$$\mid d_1, \ldots, d_s \in D[4], d_0 \in \Delta_{n/2^s}\}$$

定理 1（田中-T. 2017）

$\mathbb{Z}_\mu := \{\alpha 1_n \mid \alpha^\mu = 1_n\} \subset U(n)$

θ：1 の原始 2μ 乗根

$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$：自然な射影

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の MAS は次の何れかに共役

（1）n または μ が奇数の場合

$$\pi_n(\Delta_n \cup \theta\Delta_n)$$

（2）n および μ が偶数の場合

$\pi_n(D(s,n) \cup \theta D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く

$$D(k-1, 2^k) = \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes \boldsymbol{\Delta}_2$$

$$\subsetneq \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes D[4] = D(k, 2^k)$$ と

いう包含関係があるため、先の定理において

$(s, n) = (k-1, 2^k)$ は除かれる。

証明の概要

A：$\pi_n(U(n))$ の極大対蹠部分群

$B=\pi_n^{-1}(A)\subset U(n)$

B が非可換ならば、$n=2n'$ となり、

$U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 A' が存在して A

は $\pi_n(D[4]\otimes\pi_{n'}^{-1}(A'))$ と共役になる。

この証明は中心体

$C(1_{n'},-1_{n'})$：二点を結ぶ測地線の中点全体

を詳しく調べて行う。

さらに上の主張を利用して帰納的に定理を証明する。

$O(n)/\{\pm 1_n\}$, $SO(n)/\{\pm 1_n\}$ (n が偶数),
$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ (μ が n を割り切る),
$Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ についても同様の分類結果が得られる。

$Spin(n)$ および $Ss(n)$ の極大対蹠部分群の分類は未完。

G：コンパクト Lie 群, 両側不変計量

G_0：G の単位連結成分

M ：$\mathrm{Fix}(s_e, G)$ の連結成分, $\dim M > 0$

$(\mathrm{Fix}(s_e, G) = \{g \in G \mid g^2 = e\})$

$s_x|_M$ $(x \in M)$ は M の点対称になり M はコンパクト対称空間

$M = \bigcup_{g \in G_0} \rho_g(x)$ 　ここで、$\rho_g(x) = gxg^{-1}$

$I_0(M) = \{\rho_g|_M \mid g \in G_0\}$

A：M の極大対蹠集合

$A \cup \{e\}$ は G の対蹠集合 $(A \subset \mathrm{Fix}(s_e, G))$

$\tilde{A}$：$A \cup \{e\}$ を含む G の極大対蹠部分群

$A = M \cap \tilde{A}$ (A の極大性)

$B_0, \ldots, B_k$：G の極大対蹠部分群の各 G_0 共役類の代表

$0 \leq \exists s \leq k,\ \exists g \in G_0 \quad \text{s.t. } \tilde{A} = \rho_g(B_s)$

$A = M \cap \rho_g(B_s) = \rho_g(M \cap B_s)$

A は M 内で $M \cap B_s$ と $I_0(M)$ 合同

M の極大対蹠集合の $I_0(M)$ 合同類の代表候補

$$M \cap B_0, M \cap B_1, \ldots, M \cap B_k$$

$$\mathrm{Fix}(\boldsymbol{s_e}, \boldsymbol{U(n)}) = \{\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{U(n)} \mid \boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{e}\}$$
$$= \bigcup_{g \in U(n)} \boldsymbol{\rho_g}\{\mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)\}$$
$$= \bigcup_{0 \le k \le n} \bigcup_{g \in U(n)} \boldsymbol{\rho_g}(1_{k,n-k})$$

ここで $1_{k,n-k} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n-k})$

$\bigcup_{g \in U(n)} \boldsymbol{\rho_g}(1_{k,n-k})$ **の各元に** $+1$ **固有空間を対応させることにより、これは複素** Grassmann **多様体** $G_k(\mathbb{C}^n)$ **と同一視できる。**

$$\mathrm{Fix}(s_e, U(n)) = \bigcup_{0\leq k\leq n} G_k(\mathbb{C}^n)$$

$U(n)$ の極大対蹠部分群は共役を除いて Δ_n のみなので、$G_k(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合は $U(n)$ 合同を除いて $G_k(\mathbb{C}^n) \cap \Delta_n$ のみ。$\mathbb{C}^n$ の標準的ユニタリ基底を $e_1, \ldots, e_n$ とすると、

$$G_k(\mathbb{C}^n) \cap \Delta_n$$
$$= \{\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\rangle_{\mathbb{C}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$$

これは大対蹠集合になり、$\#_2 G_k(\mathbb{C}^n) = \binom{n}{k}$.

$G_m(\mathbb{C}^{2m})$ の対合的等長変換

$\gamma : G_m(\mathbb{C}^{2m}) \to G_m(\mathbb{C}^{2m}); V \mapsto V^{\perp}$

は $U(2m)$ の対合的等長変換

$-1 : U(2m) \to U(2m); g \mapsto -g$

に拡張できる。これにより、

$U(2m)/\{\pm 1\} \supset G_m(\mathbb{C}^{2m})/\{\pm 1\}$ となる。

簡単に $U(2m)^* \supset G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ と書く。

$G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ は $\mathrm{Fix}(s_e, U(2m)^*)$ の連結成分の一つになる。

$2m = 2^k \cdot l$ (l は奇数). $U(2m)^*$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\pi_{2m}(\{1, \sqrt{-1}\}D(s, 2m))$$
$$(0 \leq s \leq k, (s, 2m) = (k-1, 2^k) \text{ を除く})$$

これらと $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の共通部分を記述するため

$$PD(s, n) = \{d \in D(s, n) \mid d^2 = 1_n\},$$
$$ND(s, n) = \{d \in D(s, n) \mid d^2 = -1_n\}$$

とおく。

$D(s,n)$ の元のうち、$D[4]$ のテンソル積中 $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ の個数が偶数のときは $PD(s,n)$ の元であり、奇数のときは $ND(s,n)$ の元である。

$PD(0,n) = \Delta_n, ND(0,n) = \emptyset.$

$$\pi_{2m}(\{1, \sqrt{-1}\}D(s,2m)) \cap G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$$
$$= \pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s,2m) \mid$$
$$\exists d_i \ (0 \le i \le s) \ \mathrm{Tr} d_i = 0\}$$
$$\cup \sqrt{-1}ND(s,2m))$$

定理 2（田中-T.）
$G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の MAS は次のいずれかに合同

$$\pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s, 2m) \mid \exists d_i \ (0 \leq i \leq s) \ \mathrm{Tr} d_i = 0\} \cup \sqrt{-1} ND(s, 2m))$$

$(0 \leq s \leq k,$

$(s, 2m) = (0, 4), (k-1, 2^k)$ を除く）

$$
\begin{aligned}
&\{d \in \boldsymbol{\Delta}_4 \mid \mathrm{Tr}\boldsymbol{d} = 0\} \\
&= \{\boldsymbol{d}_1 \otimes \boldsymbol{d}_2 \mid \boldsymbol{d}_i \in \boldsymbol{\Delta}_2, \exists \boldsymbol{i}\ \mathrm{Tr}\boldsymbol{d}_i = 0\} \\
&\subsetneq \{\boldsymbol{d}_1 \otimes \boldsymbol{d}_2 \mid \boldsymbol{d}_i \in D[4], \exists \boldsymbol{i}\ \mathrm{Tr}\boldsymbol{d}_i = 0\}
\end{aligned}
$$

という包含関係があるため、先の定理において $(s, 2m) = (0, 4)$ は除かれる。

他の古典型コンパクト対称空間およびその商空間についても同様の分類結果が得られる。