対称空間の対蹠集合に関連する代数的対象

九大代数学セミナー

田崎博之

2016年3月4日

1 対蹠集合

M : Riemann対称空間

s_x : $x \in M$における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$|S|$: Sの濃度

$\#_2 M$: **2-number** of M

$= \sup\{|S| \mid S$: 対蹠集合$\}$

S : 大対蹠集合$\Leftrightarrow \#_2 M = |S|$

$\{x, -x\}$: S^n の大対蹠集合

$\#_2 S^n = 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$e_1, \ldots, e_n$: $\mathbb{K}^n$ の $\mathbb{K}$ 正規直交基底

$$\{\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}\} \in G_r(\mathbb{K}^n) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$$

: $G_r(\mathbb{K}^n)$ の大対蹠集合

$$\#_2 G_r(\mathbb{K}^n) = \binom{n}{r}$$

$$\left\{ \mathbf{1_3}, \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{-1} & \\ & & \mathbf{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{-1} & & \\ & \mathbf{-1} & \\ & & \mathbf{1} \end{bmatrix} \right\}$$

: $\boldsymbol{SO(3)}$ の大対蹠集合

$$\#_2 \boldsymbol{SO(3)} = \mathbf{4} = \mathbf{2^2}$$

部分群 $\cong \mathbb{Z}_{\mathbf{2}} \times \mathbb{Z}_{\mathbf{2}}$

2 対称 $\boldsymbol{R}$ 空間

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道になる Riemann 対称空間: 対称 $\boldsymbol{R}$ 空間

等長変換全体の単位連結成分の元で写り合う

: 合同

定理 2.1(田中-T.) 対称 $\boldsymbol{R}$ 空間において

(A) $\forall$対蹠集合 $\subset$ $\exists$大対蹠集合

(B) 大対蹠集合同士は合同

大対蹠集合は対称 $\boldsymbol{R}$ 空間を線形イソトロピー作用が定める対称対の **Weyl** 群の軌道になる。

3 有向実 Grassmann 多様体

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ 内の有向 k 次元部分空間全体

$\mathrm{rank}\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) = \min\{k, n-k\} \geq 3$

$\Rightarrow$ $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$: 対称 R 空間ではない

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合

$\leftrightarrow$ $\{1, \dots, n\}$ のある部分集合族

$\Rightarrow$ 組合せ論の問題に帰着

$[\boldsymbol{n}] = \{1, \ldots, \boldsymbol{n}\}$, $1 \leq \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{n}$ に対して

$$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}} = \{\boldsymbol{\alpha} \subset [\boldsymbol{n}] \mid |\boldsymbol{\alpha}| = \boldsymbol{k}\}$$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \binom{[n]}{k}$ に対して、$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$: 対蹠的

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \backslash \boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{\beta}\}$ の個数が偶数

$\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha} \cap \boldsymbol{\beta}| \equiv \boldsymbol{k} \pmod{2}$

部分集合 $\boldsymbol{A} \subset \binom{[n]}{k}$: 対蹠的

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ の任意の二元が対蹠的

部分集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subset \binom{[n]}{k}$: が合同

$\Leftrightarrow$ $[\boldsymbol{n}]$ の置換で写り合う

定理 **3.1(T.)**　$\boldsymbol{e_1, \ldots, e_n}$ **:** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ の正規直交基底

極大対蹠集合 $\boldsymbol{A} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ に対して

$$\{\pm \mathbf{span}_{\mathbb{R}}\{\boldsymbol{e_i} \mid \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{\alpha}\} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}\}$$

は $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合である。

この対応は $\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の極大対蹠集合の合同類全体と $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合の合同類全体の間の一対一対応を与える。

$k = 1$ の場合 $\{\{1\}\}$: $\binom{[n]}{1}$ の極大対蹠集合

$\leftrightarrow \{\pm x\}$: $\tilde{G}_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$ の極大対蹠集合

$\lfloor r \rfloor$: 実数 r を越えない最大の整数

$k = 2$ の場合

$\binom{[2l]}{2}$ の部分集合

$$A(2, 2l) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2l - 1, 2l\}\}$$

$A\left(2, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$: $\binom{[n]}{2}$ の極大対蹠集合

Kähler 形式 : $\theta^1 \wedge \theta^2 + \cdots + \theta^{2l-1} \wedge \theta^{2l}$

$U(l)$ の作用で不変な 2 次交代形式

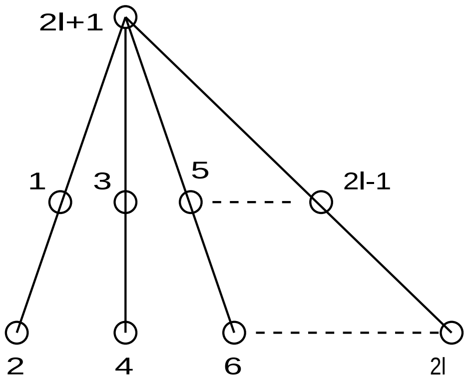
$\boldsymbol{k = 3}$ の場合

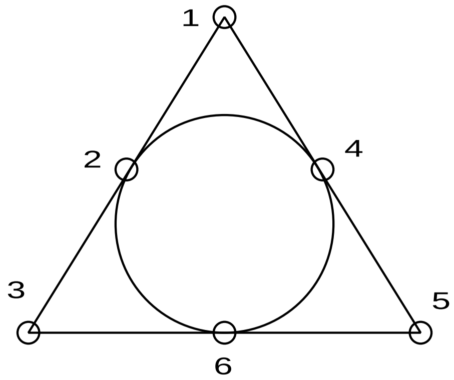
$\binom{[n]}{\boldsymbol{3}}$ の対蹠集合

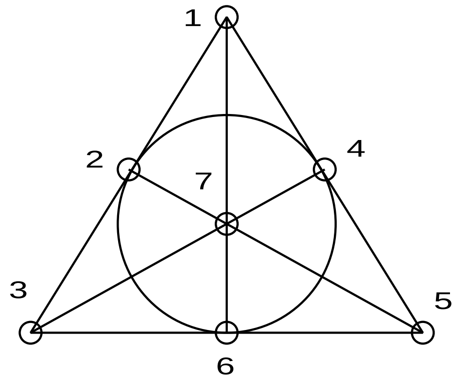
$$\boldsymbol{A(3, 2l+1) = \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2, 2l)\}}$$

$$\boldsymbol{B(3, 6) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}\}}$$

$$\boldsymbol{B(3, 7) = B(3, 6) \cup \{\{1, 6, 7\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 4, 7\}\}}$$







定理 **3.2(T.)** $\binom{[n]}{3}$ の極大対蹠集合：

n	$3, 4$	5	6	$7, 8$
	$A(3,3)$	$A(3,5)$	$B(3,6)$	$B(3,7)$

n	9 以上
	$A\left(3, 2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor + 1\right), B(3,7)$

$\boldsymbol{B(3,6)}$ は次と合同

$\{\{\mathbf{2,4,5}\},\{\mathbf{1,4,6}\},\{\mathbf{2,3,6}\},\{\mathbf{1,3,5}\}\}$

$\mathrm{Re}(\boldsymbol{dz^1\wedge dz^2\wedge dz^3}),\ \boldsymbol{dz^j=\theta^{2j-1}+\sqrt{-1}\theta^{2j}}$

: $\boldsymbol{SU(3)}$ 不変 $\mathbf{3}$ 次交代形式

special Lagrangian 3-form

$\boldsymbol{B(3,7)}$ から定まる $\mathbb{R}^{\mathbf{7}}$ 上の $\mathbf{3}$ 次交代形式

: $\boldsymbol{G_2}$ の $\mathbf{Im}\mathbb{O}\cong\mathbb{R}^{\mathbf{7}}$ への作用で不変

($\boldsymbol{G_2}=\mathbf{Aut}(\mathbb{O})$: 例外型コンパクト **Lie** 群)

Harvey-Lawson が **calibration** として構成

$\boldsymbol{k = 4}$ の場合

$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{4}}$ の対蹠集合

$$\boldsymbol{A(4, 2l) = \{\alpha \cup \beta \mid \alpha, \beta \in A(2, 2l),\ \alpha \neq \beta\}}$$

$$\boldsymbol{B(4, 7) = \{[7] \backslash \alpha \mid \alpha \in B(3, 7)\}}$$

$$\boldsymbol{B(4, 8) = B(4, 7) \cup \{\alpha \cup \{8\} \mid \alpha \in B(3, 7)\}}$$

定理 3.3(T.) $\binom{[n]}{4}$ の極大対蹠集合：

$$\boldsymbol{A}(4,2l)\ (l \geq 2, \neq 4), \quad \boldsymbol{B}(4,7), \quad \boldsymbol{B}(4,8)$$

と合同なもののしかるべき合併

注意 3.4 $\boldsymbol{A}(4,8) \subsetneq \boldsymbol{B}(4,8)$ より、$\boldsymbol{A}(4,8)$ は極大ではない

$\boldsymbol{A(4,2l)}$ は $\mathbb{C}^{l}$ の Kähler 形式の二乗に対応
: $\boldsymbol{U(l)}$ 不変 4 次交代形式

$\boldsymbol{B(4,7)}$ は $\mathbb{R}^{7}$ の $\boldsymbol{G_2}$ 不変 3 次交代形式の Hodge star に対応 : $\boldsymbol{G_2}$ 不変

$\boldsymbol{B(4,8)}$ は $\mathbb{H}^{2} \cong \mathbb{R}^{8}$ の

$$\boldsymbol{\omega_I^2 + \omega_J^2 + \omega_K^2}$$

に対応 : $\boldsymbol{Sp(2)Sp(1)}$ 不変、 Krains が構成
$\boldsymbol{\omega_I, \omega_J, \omega_K}$ は $\boldsymbol{I, J, K}$ から定まる Kähler 形式

4 コンパクト Lie 群

コンパクト Lie 群：両側不変 Riemann 計量

$\Rightarrow$ コンパクト Riemann 対称空間

単位元を含む極大対蹠集合 $\Rightarrow$ 部分群

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$

多くの古典型コンパクト Lie 群：対称 $\boldsymbol{R}$ 空間

古典型コンパクト Lie 群の商群：一般には対称 $\boldsymbol{R}$ 空間ではない

古典型コンパクト Lie 群の商群、$\boldsymbol{G_2}$ およびそれらの Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類結果を述べる。

$$\boldsymbol{\Delta}_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}),$$

$$\boldsymbol{\Delta}_n^{\pm} = \{\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\Delta}_n \mid \mathbf{det}\, \boldsymbol{g} = \pm \mathbf{1}\}$$

$\boldsymbol{\Delta}_n$ と $\boldsymbol{\Delta}_n^{+}$ はそれぞれ $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{n})$ と $\boldsymbol{SU}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n})$ の共役を除いて一意的な極大対蹠部分群である。

これらは大対蹠集合になり、定理 **2.1** と同じ主張が成り立つ。

$$D[4]=\left\{\begin{bmatrix}\pm1 & 0\\ 0 & \pm1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & \pm1\\ \pm1 & 0\end{bmatrix}\right\}\subset O(2),$$

$$D^{\pm}[4]=\{g\in D[4]\mid \det g=\pm1\}.$$

$D[4]$：二面体群、正四角形を不変にする

自然数 n を $n=2^k\cdot l$ (l：奇数) と分解し、

$0\le s\le k$ に対して s 個の $D[4]$ と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積 $D(s,n)$ を定める。

$$D(s,n)=D[4]\otimes\cdots\otimes D[4]\otimes\Delta_{n/2^s}\subset O(n)$$

定理 $\mathbf{4.1}$(田中-T.)　μ : 自然数、

$\mathbb{Z}_\mu$: $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、

θ : 1 の原始 2μ 乗根、

$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ 自然な射影

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}D(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

注意 4.2 $\quad \boldsymbol{\Delta_2} \subsetneq \boldsymbol{D}[4]$ より

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{D}[4] \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{D}[4] \otimes \boldsymbol{\Delta_2} \\ &\subsetneq \boldsymbol{D}[4] \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{D}[4] \otimes \boldsymbol{D}[4] \end{aligned}$$

すなわち $\boldsymbol{D(k-1, 2^k)} \subsetneq \boldsymbol{D(k, 2^k)}$ が成り立ち、$\boldsymbol{D(k-1, 2^k)}$ は極大ではない。

定理 4.1 の証明の概要

$\boldsymbol{A} : \boldsymbol{U}(\boldsymbol{n})/\mathbb{Z}_{\mu}$ の極大対蹠部分群

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\pi}_{n}^{-1}(\boldsymbol{A})$ が可換の場合

　$\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{\pi}_n(\{1, \boldsymbol{\theta}\}\boldsymbol{\Delta}_n)$ に共役

$\boldsymbol{B}$ が非可換の場合

　$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{2n'}$　$\boldsymbol{B}$ は $\boldsymbol{D}[4] \otimes \boldsymbol{U}(\boldsymbol{n'})$ の部分群に共役

この議論を続けて定理を得る。

$\boldsymbol{SU}(\boldsymbol{n})/\mathbb{Z}_{\mu}$ の場合は $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{n})/\mathbb{Z}_{\mu}$ の結果を利用、$\boldsymbol{G}/\{\pm 1_n\}$ $(\boldsymbol{G} = \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{SO}(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{Sp}(\boldsymbol{n}))$ の場合は同様の議論 $\Rightarrow$ 極大対蹠部分群の分類

定理 4.3(田中-T.)

$\tau : \mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n); X \mapsto \bar{X}$

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\{e, \tau\}\mathrm{Ad}(D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合を除く

定理 4.3 の証明の概略

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n)) = \{e, \tau\}\mathrm{Ad}(U(n))$

: 二つの連結成分

G : コンパクト Lie 群

G_0 : G の単位連結成分

T : G_0 の極大トーラス

$$G_0 = \bigcup_{g \in G_0} gTg^{-1}$$

$g_1 \in G \backslash G_0$ $\iota_{g_1}(x) = g_1 x g_1^{-1}$

T_1 : $F(\iota_{g_1}, G_0)$ の極大トーラス

$$g_1 G_0 = \bigcup_{g \in G_0} g(g_1 T_1)g^{-1}$$

$\mathrm{Ad}(U(n)) \cong SU(n)/\mathbb{Z}_n$ の結果と上記を利用

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n), \mathfrak{sp}(n)$) の場合は、$G/\{\pm 1_n\}$ ($G = O(n), SO(n), Sp(n)$) の結果を利用 $\Rightarrow$ 極大対蹠部分群の分類

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(8))/\mathrm{Ad}(SO(8)) \cong \mathfrak{S}_3$
位数 3 の元は極大対蹠部分群に影響しない

5. G_2 と $G_2/SO(4)$

$F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+,\ M_1^+ \cong G_2/SO(4)$

$o \in M_1^+,\ F(s_o, M_1^+) = \{o\} \cup M_{1,1}^+$

$M_{1,1}^+ \cong (S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ これの極大対蹠集合

$A = \{[e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$

$A_{1,1}$: A に対応する $M_{1,1}^+$ の極大対蹠集合

定理 5.1(田中-T.)

$\{o\} \cup A_{1,1}$: M_1^+ の極大対蹠集合

$\{e, o\} \cup A_{1,1}$: G_2 の極大対蹠部分群

いずれも合同、共役を除いて一意的