

# 有向実 Grassmann 多様体 の対蹠集合の織り方

田崎博之

筑波大学数理物質系

2018 年 2 月 13 日

水戸幾何セミナー

# 1 対蹠集合

定義 (Chen-長野)

$M$  : コンパクト Riemann 対称空間

$s_x$  :  $x \in M$  における点対称

$S \subset M$  : 対蹠集合

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ s_x(y) = y$$

$S$  : 大対蹠集合  $\Leftrightarrow |S|$  : 最大値

上記最大値  $\#_2 M$  : 2-number

対称  $R$  空間の場合

2-number : Chen-長野、竹内

大対蹠集合の形 : Sánchez, 田中-T.

対称  $R$  空間ではない場合

2-number : Chen-長野

対蹠集合の全体 : わかりつつある

例外 : 階数 3 以上の有向実 Grassmann

多様体、 $Spin(n)$  ( $n \geq 7$ )

## 2 有向実 Grassmann 多様体

$$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$$

:  $\mathbb{R}^n$  内の  $k$  次元有向部分空間全体

$SO(n)$  不変 Riemann 計量により

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$  : Riemann 対称空間

正の向き of 正規直交基底の外積を対応

$$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \subset \wedge^k \mathbb{R}^n$$

$X$  : 集合、 $k$  : 自然数

$$\binom{X}{k} = \{\alpha \subset X \mid |\alpha| = k\}$$

$$[n] = \{1, \dots, n\}$$

$\alpha, \beta \in \binom{[n]}{k}$  に対して

$$\alpha \setminus \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\}$$

$\alpha, \beta$  : 对蹠的  $\Leftrightarrow |\alpha \setminus \beta|$  : 偶数

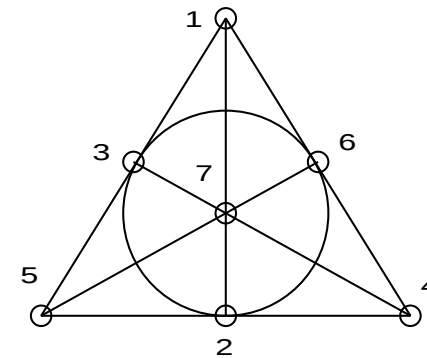
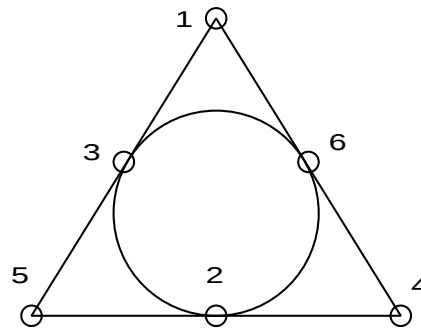
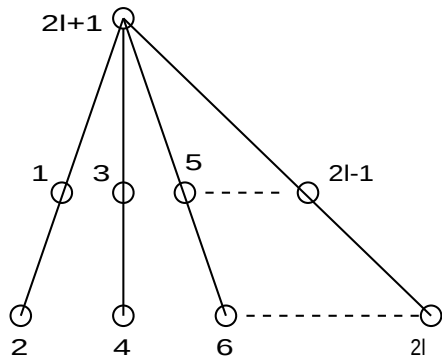
$A \subset \binom{[n]}{k}$  : 对蹠集合

$\Leftrightarrow \alpha, \beta$  : 对蹠的 ( $\forall \alpha, \beta \in A$ )

$\binom{[n]}{1}$  の対蹠集合 : 一点のみ

$\binom{[n]}{2}$  の対蹠集合  $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots\}$

$\binom{[n]}{3}$  の対蹠集合



三番目 : Fano 平面 (二元体上の射影平面)

Fano 平面  $\mathbb{F}_2 P^2 = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

$$x_1 = 0 : \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

$$x_2 = 0 : \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$$

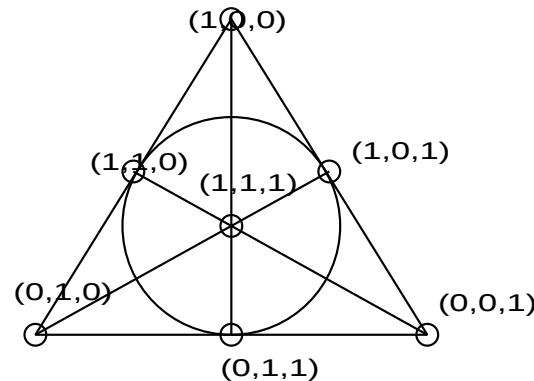
$$x_3 = 0 : \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$$

$$x_1 + x_2 = 0 : \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$x_1 + x_3 = 0 : \{(0, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$x_2 + x_3 = 0 : \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 : \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$



# 定理 1 (T.2013)

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$  の極大対蹠集合の分類

$\leftrightarrow \binom{[n]}{k}$  の極大対蹠的集合の分類

$e_1, \dots, e_n : \mathbb{R}^n$  の正規直交基底

$A : \binom{[n]}{k}$  の極大対蹠的集合

$\Rightarrow \{ \pm \langle e_{\alpha(1)}, \dots, e_{\alpha(k)} \rangle_{\mathbb{R}} \mid \alpha \in A \}$

$: \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$  の極大対蹠集合

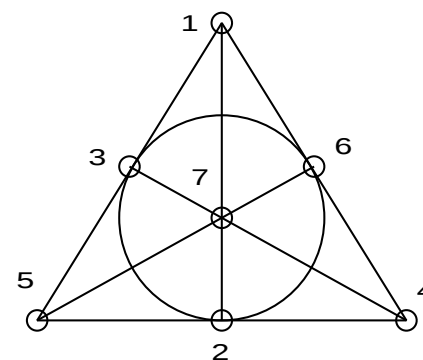
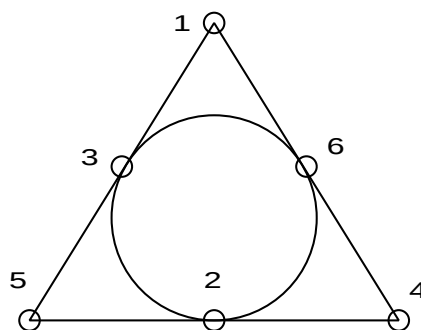
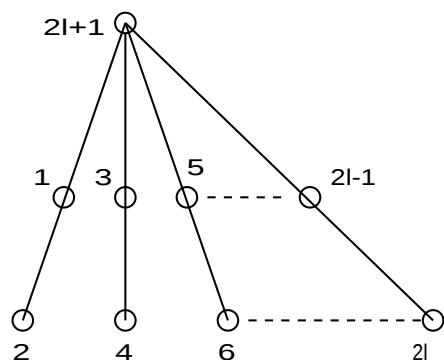
逆の対応も定まる

# MAS : 極大対蹠的部分集合

定理 2(T.2013)  $k \leq 4$  のとき、

$\binom{[n]}{k}$  の MAS の分類完成

$k = 3$  の場合



$\binom{[n]}{k}$  ( $k \leq 4$ ) の MAS の分類に現れる  
MAS

↓ 一般化

$k > 4$  のときの  $\binom{[n]}{k}$  の MAS の構成  
： 分類または性質を調べる

$$A(2, 2l) = \{\{1, 2\}, \dots, \{2l - 1, 2l\}\} \subset \binom{[2l]}{2}$$

$$A(2k, 2l)$$

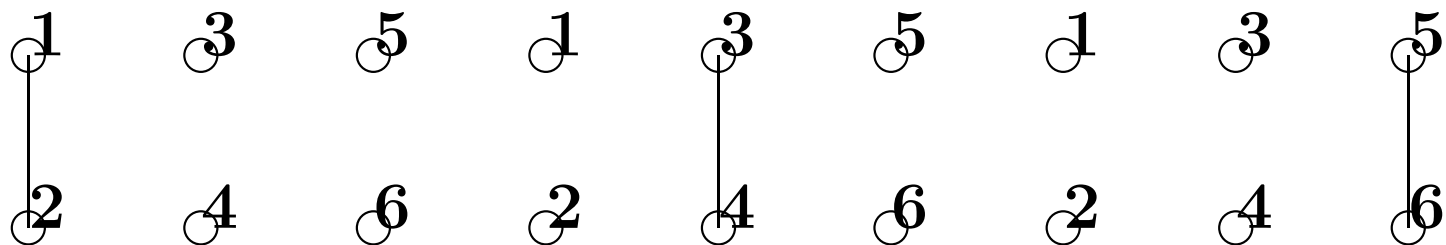
$$= \left\{ \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k \mid \begin{array}{l} \alpha_i \in A(2, 2l) \\ \alpha_i \neq \alpha_j \end{array} \right\} \subset \binom{[2l]}{2k}$$

$$A(2k + 1, 2l + 1)$$

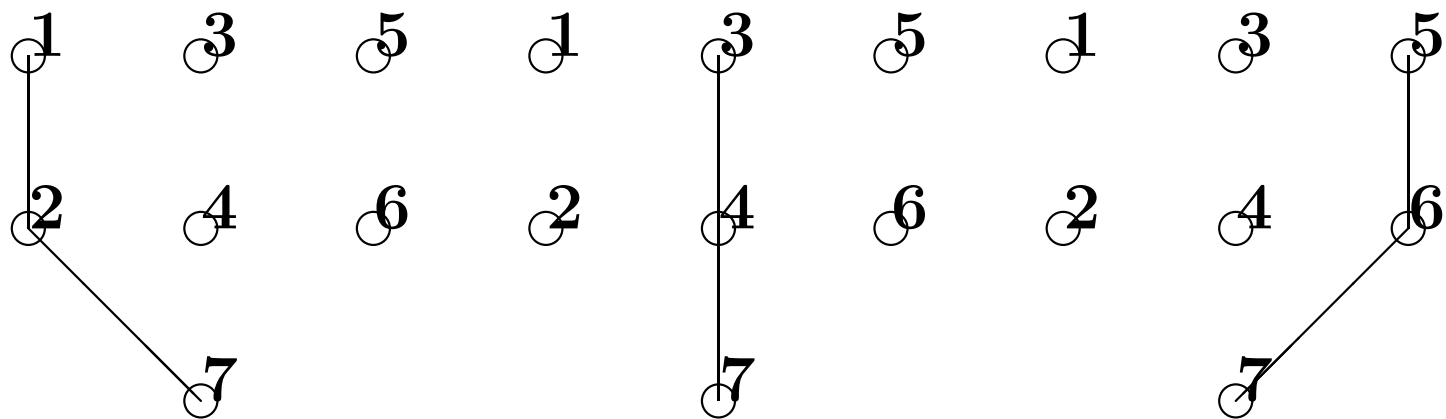
$$= \{\alpha \cup \{2l + 1\} \mid \alpha \in A(2k, 2l)\} \subset \binom{[2l + 1]}{2k + 1}$$

これらは縦系の集まりとみなせる。

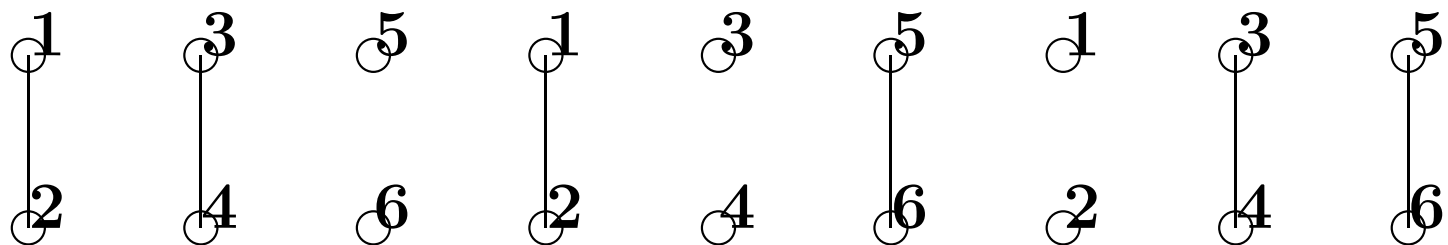
$A(2, 6)$



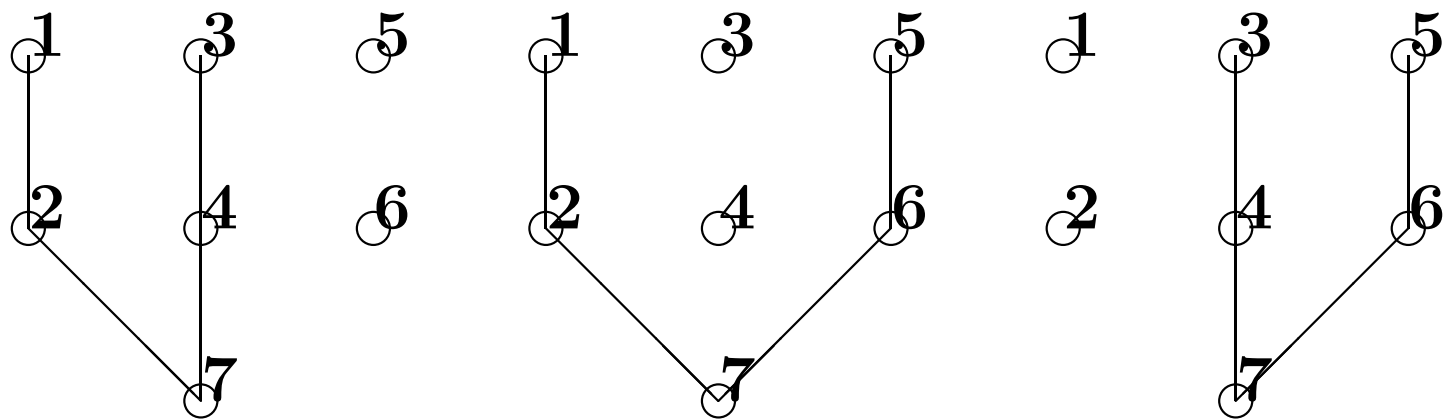
$A(3, 7) = \{\alpha \cup \{7\} \mid \alpha \in A(2, 6)\}$



$A(4, 6)$



$A(5, 7) = \{\alpha \cup \{7\} \mid \alpha \in A(4, 6)\}$

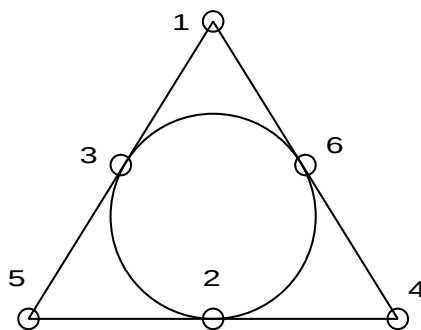
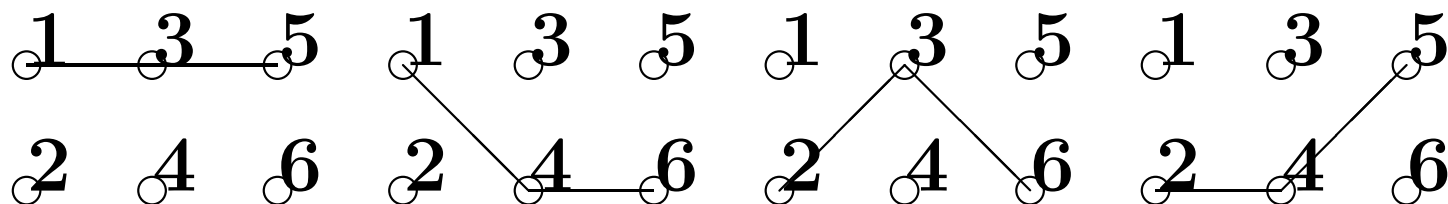


横系の集まりとみなせるものを考える。

$$Ev_{2m} = \{ \{ \alpha(1), \dots, \alpha(m) \} \mid$$

$$\alpha(i) \in \{2i - 1, 2i\}, \text{ 偶数の } \alpha(i) \text{ は偶数個} \}$$

とおくと  $Ev_{2m} \subset \binom{[2m]}{m}$ . 次は  $Ev_6$



$X, Y$  : 集合  $X \cap Y = \emptyset$

$A \subset \binom{X}{k}, B \subset \binom{Y}{l}$  に対して

$$A \times B := \{\alpha \cup \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\} \\ \subset \binom{X \cup Y}{k+l}$$

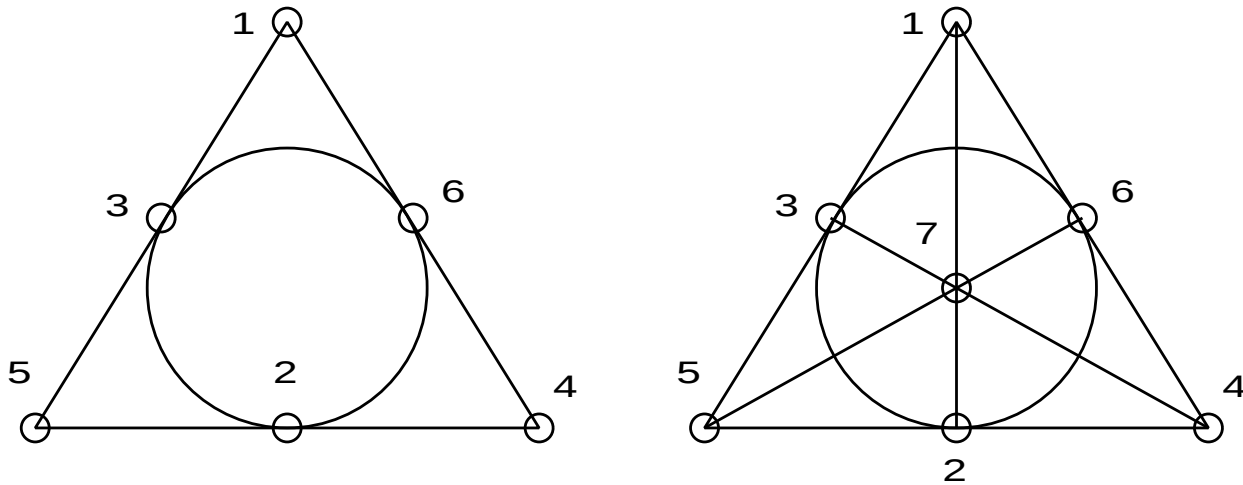
この記号を使うと  $A(2k+1, 2l+1)$  は  
 $A(2k, 2l) \times \{\{2l+1\}\}$  と表せる。

$A \subset \binom{[n]}{k}$  と自然数  $m$  に対して

$$A + m = \{\{i + m \mid i \in \alpha\} \mid \alpha \in A\}.$$

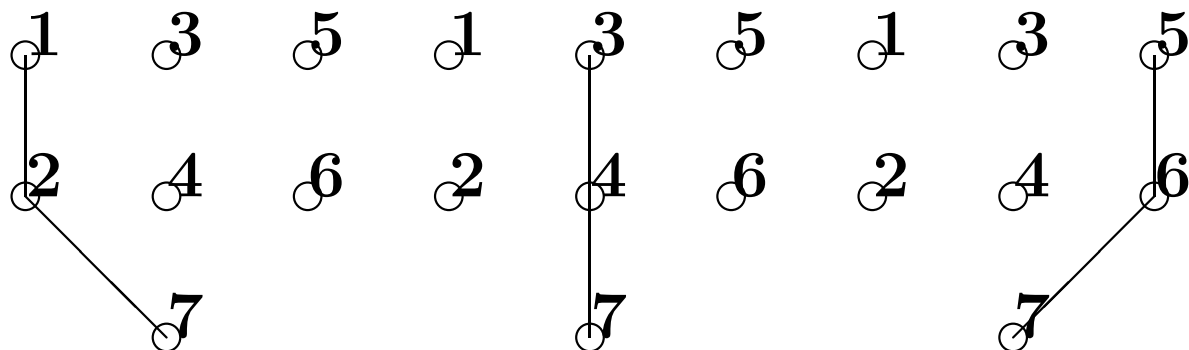
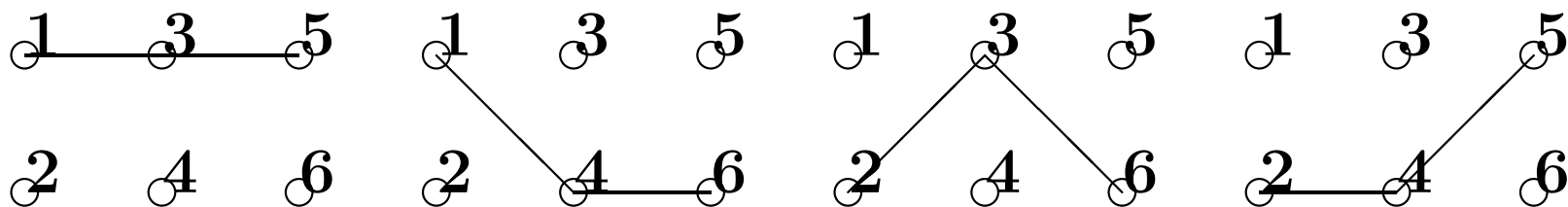
$+m$  だけ移動している

$Ev_6$  と  $Ev_6 \cup A(3, 7)$  : Fano 平面



これらはそれぞれ  $\binom{[6]}{3}$  と  $\binom{[7]}{3}$  内の唯一の MAS  
である。

$Ev_6 \wr Ev_6 \cup A(3, 7)$



縦系と横系の集まりを織って  $k \leq 4$  のときの  $\binom{[n]}{k}$  の MAS の分類を記述する。

$\binom{[n]}{1}$  の MAS は  $\{[1]\}$  に合同。

$\binom{[n]}{2}$  の MAS は  $A(2, 2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$  に合同。

$\binom{[3]}{3}, \binom{[4]}{3}$  の MAS は  $[3] = A(3, 3)$  に合同。

$\binom{[5]}{3}$  の MAS は  $A(3, 5)$  に合同。

$\binom{[6]}{3}$  の MAS は  $Ev_6$  に合同。

$\binom{[7]}{3}, \binom{[8]}{3}$  の MAS は  $Ev_6 \cup A(3, 7)$  に合同。

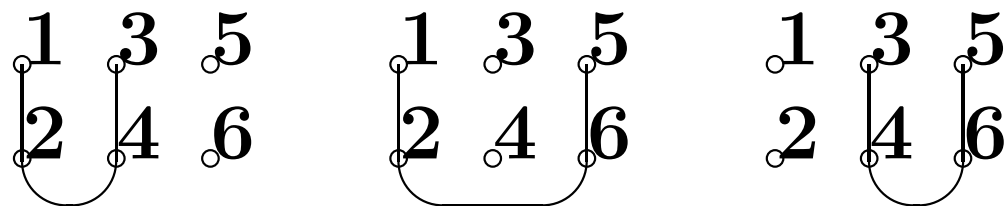
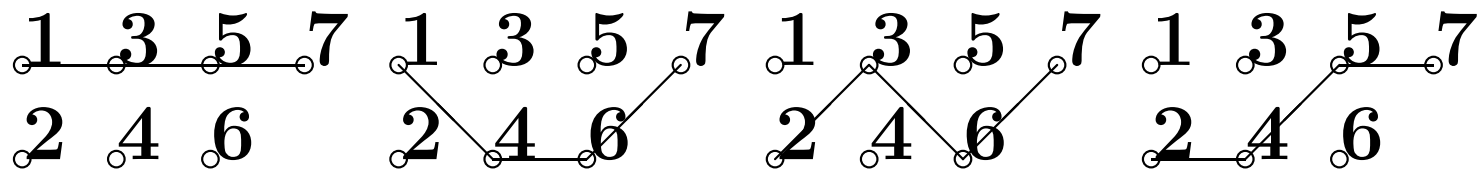
$\binom{[n]}{3}$  ( $n \geq 9$ ) の MAS は  $Ev_6 \cup A(3, 7)$  または  $A(3, 2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)$  に合同。

$\binom{[4]}{4}$ ,  $\binom{[5]}{4}$  の MAS は  $[4] = A(4, 4)$  に合同。

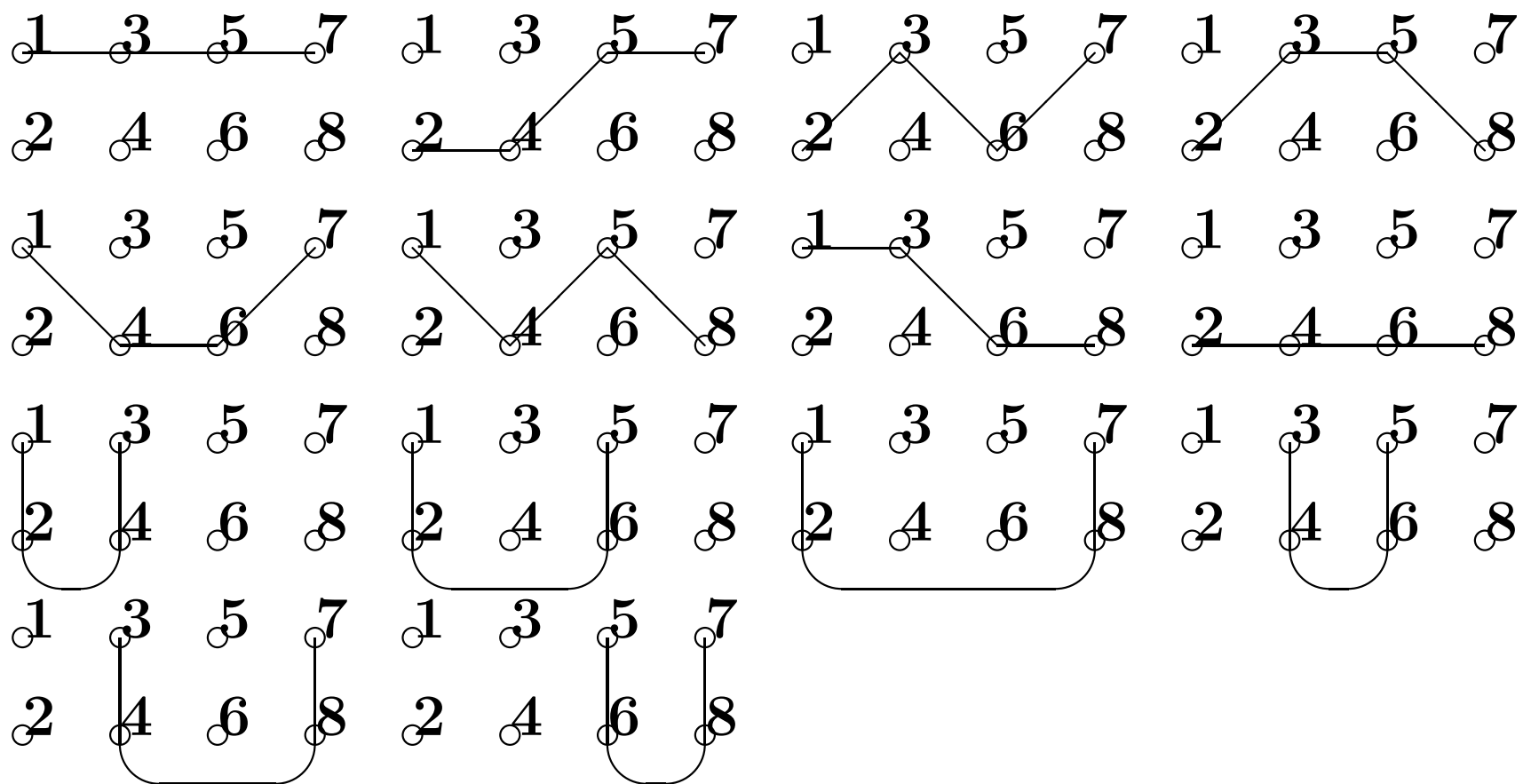
$\binom{[6]}{4}$  の MAS は  $A(4, 6)$  に合同。

$\binom{[7]}{4}$  の MAS は

$B(4, 7) := A(4, 6) \cup Ev_6 \times \{\{7\}\}$  に合同。



$\binom{[8]}{4}$ ,  $\binom{[9]}{4}$  の MAS は  $Ev_8^+ := A(4, 8) \cup Ev_8$  に合同。



$\binom{[10]}{4}$  の MAS は  $A(4, 10)$  または  $Ev_8^+$  に合同。

$\binom{[n]}{4}$  ( $n \geq 11$ ) の MAS は次のいずれかに合同。

$$A \left( 4, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right),$$

$$B(4, 7) \cup \left[ \text{a full MAS in } \binom{[n-7]}{4} + 7 \right],$$

$$Ev_8^+ \cup \left[ \text{a MAS in } \binom{[n-8]}{4} + 8 \right]$$

$$A : \text{full in } \binom{[n]}{k}$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [n] \exists \alpha \in A \text{ s.t. } i \in \alpha$$

$$\Leftrightarrow [n] = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$$

定理 (T.2014)

$A(2k, 2l), A(2k + 1, 2l + 1) : AS$

$l \geq 3k + 1$  のとき

$A(2k, 2l) : MAS$  in  $\binom{[2l]}{2k}, \binom{[2l+1]}{2k}$

$A(2k + 1, 2l + 1)$

$: MAS$  in  $\binom{[2l+1]}{2k+1}, \binom{[2l+2]}{2k+1}$

$k$  に対して  $l$  が大きいと縦系の集まりは  
極大になる。

$$a(k, n) = \max \left\{ |A| \mid A : \text{AS in } \binom{[n]}{k} \right\}$$

$$a(1, n) = 1 \quad a(2, n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$a(2k, n) \geq \left| A \left( 2k, 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \right| = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k},$$

$$\begin{aligned} a(2k+1, n) &\geq \left| A \left( 2k+1, 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \right| \\ &= \binom{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{k}. \end{aligned}$$

$k \leq 4$  の場合の MAS の分類結果より

$$a(1, n) = 1, \quad a(2, n) = \lfloor n/2 \rfloor$$

| $n$       | 4 | 5 | 6 | 7, ..., 16 | 17 以上                           |
|-----------|---|---|---|------------|---------------------------------|
| $a(3, n)$ | 1 | 2 | 4 | 7          | $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ |

| $n$       | 5 | 6 | 7 | 8, ..., 11 | 12 以上                                    |
|-----------|---|---|---|------------|------------------------------------------|
| $a(4, n)$ | 1 | 3 | 7 | 14         | $\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}$ |

大きい数のときには、縦糸の集まりが最大値を与える。

定理 (T.2015)

$$n \geq 87 \Rightarrow a(5, n) = \binom{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}{2}$$

$\binom{[n]}{5}$  の大対蹠集合

$$: A \left( 5, 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \right) \text{ と合同}$$

次が成り立つことが期待される

$k$  に対して  $n$  が十分大きい  $\Rightarrow$

$\binom{[n]}{k}$  の大対蹠集合は  $A(2k', 2n')$  または  
 $A(2k' + 1, 2n' + 1)$  に合同

定理 (Frankl-徳重 2016)

$k$  : 自然数、 $n$  が  $k$  に対して十分大きいとき、

$\binom{[n]}{k}$  の大対蹠集合 :  $A(k, l)$  に合同

ただし、 $k$  が奇数のとき  $l$  は  $n$  以下の最大奇数であり、 $k$  が偶数のとき  $l$  は  $n$  以下の最大偶数である。

$n$  が  $k$  に対して十分大きいとき、 $\binom{[n]}{k}$  の大対蹠集合は縦系の集まりのみになる。

# 横系の集まりの極大性

定理 (T.2014)

(1)  $2m \equiv 2, 4, 6 \pmod{8}$  のとき、

$Ev_{2m} : \binom{[2m]}{m}$  の MAS

(2)  $Ev_{8m} : \binom{[8m]}{4m}$  の MAS ではない

$Ev_{8m} \cup A(4m, 8m) : \binom{[8m]}{4m}$  の

MAS

横系  $Ev_*$  と縦系  $A(*, **)$  の組合せ

$$Ev_{8m}^+ = Ev_{8m} \cup A(4m, 8m),$$

$$Ev_{8m+2}^+ = Ev_{8m+2} \cup$$

$$A(4m - 2, 8m + 2) \times \{\{8m + 3, 8m + 4, 8m + 5\}\},$$

$$Ev_{8m+4}^+ = Ev_{8m+4} \cup$$

$$A(4m, 8m + 4) \times \{\{8m + 5, 8m + 6\}\},$$

$$Ev_{8m+6}^+ = Ev_{8m+6} \cup A(4m + 2, 8m + 6) \times \{\{8m + 7\}\}.$$

定理 (T.2017) 以下は  $\binom{[n]}{k}$  の MAS である。

| $k \backslash n$ | $8m$        | $8m + 1$    | $8m + 2$    | $8m + 3$    |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $4m$             | $Ev_{8m}^+$ | $Ev_{8m}^+$ | $Ev_{8m}^+$ | $Ev_{8m}^+$ |
| $4m + 1$         |             |             | $Ev_{8m+2}$ | $Ev_{8m+2}$ |

| $k \backslash n$ | $8m + 4$    | $8m + 5$      | $8m + 6$      | $8m + 7$      |
|------------------|-------------|---------------|---------------|---------------|
| $4m + 1$         | $Ev_{8m+2}$ | $Ev_{8m+2}^+$ |               |               |
| $4m + 2$         | $Ev_{8m+4}$ | $Ev_{8m+4}$   | $Ev_{8m+4}^+$ |               |
| $4m + 3$         |             |               | $Ev_{8m+6}$   | $Ev_{8m+6}^+$ |

さらなる横系と縦系の組合せ

$\Rightarrow Ev_{*}^{+}$  を含む対蹠集合の系列の構成 ( $m \geq 1$ )

$$Ev_{8m}^{+} \subset Ev_{8m}^{+(l_1, l_2)} \subset \binom{[n]}{4m},$$

$$Ev_{8m+2}^{+} \subset Ev_{8m+2}^{+l} \subset \binom{[n]}{4m+1},$$

$$Ev_{8m+4}^{+} \subset Ev_{8m+4}^{+(l_1, l_2)} \subset \binom{[n]}{4m+2},$$

$$Ev_{8m+6}^{+} \subset Ev_{8m+6}^{+l} \subset \binom{[n]}{4m+3}.$$

これら対蹠集合の系列：現在調査中

$$Ev_{10}^+ = Ev_{10} \cup A(2, 10) \times \{\{11, 12, 13\}\},$$

$$Ev_{10}^{+2} = Ev_{10} \cup A(2, 10) \times (A(2, 4) + 10) \times \{\{15\}\},$$

$$Ev_{10}^{+3} = Ev_{10} \cup A(2, 10) \times (A(2, 6) + 10) \times \{\{17\}\},$$

$\vdots$

$$Ev_{10}^{+l} = Ev_{10} \cup A(2, 10) \times (A(2, 2l) + 10) \times \{\{2l + 11\}\}.$$

$$Ev_{10}^{+l} \text{ は } \binom{[2l+11]}{5}, \binom{[2l+12]}{5} \text{ の MAS } (l \neq 2, 3)$$

$\left(\begin{smallmatrix} 2l+11 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$  の対蹠集合の濃度

|                   |    |    |    |    |    |    |         |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|---------|
| $l$               | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | $\dots$ |
| $2l + 11$         | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | $\dots$ |
| $ A(5, 2l + 11) $ | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | $\dots$ |
| $ Ev_{10}^{+l} $  | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | $\dots$ |

真に含む対蹠集合は存在しない

$$Ev_2 = \{\{1\}\} \subset \binom{[n]}{1},$$

$$Ev_6^+ \subset \binom{[7]}{3} : \text{Fano 平面}.$$