Hermann作用

田崎博之

筑波大学

水戸幾何小研究会

2022年12月24日

G:連結コンパクト Lie 群

(G, K_1), (G, K_2) : コンパクト対称対

θ_1, θ_2 : 対応する対合

K_2 の G/K_1 への左からの積作用 : Hermann 作用

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i + \mathfrak{m}_i$: Lie 環の標準分解 (θ_i の ± 1 固有空間分解)

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ 内の極大可換部分空間

$$\Rightarrow G/K_1 = \bigcup_{k \in K_2} k \mathrm{Exp}\, \mathfrak{a}$$

R. Hermann, Nerderl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A (1962)

$K_1 = K_2$ とすると、$G/K_1 = \bigcup_{k \in K_1} k \mathrm{Exp}\, \mathfrak{a}$

Lie 環では $\mathfrak{m}_1 = \bigcup_{k \in K_1} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}$

さらに、連結コンパクト Lie 群の共役作用

$\mathfrak{t}$： $\mathfrak{g}$ 内の極大可換部分環

$$G = \bigcup_{g \in G} g(\exp \mathfrak{t})g^{-1}$$

Lie 環では $\mathfrak{g} = \bigcup_{g \in G} \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{t}$

多くの行列の標準形： Hermann 作用の結果の帰結

ユニタリ行列の対角化は典型例

Hermann 作用の具体例

$(SO(2n), S(O(k)\times O(2n-k)))$, $(SO(2n), U(n))$

$SO(2n)/S(O(k)\times O(2n-k))$：実 Grass. 多様体

同一視 $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ により $SO(2n)\supset U(n)$ とみなせる

$U(n)$ の自然な $G_k(\mathbb{R}^{2n})$ への作用：Hermann 作用

作用による標準形 $l=\lfloor \frac{k}{2}\rfloor$

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{e_1, \cos\theta_1 ie_1+\sin\theta_1 e_2, \dots,\\&\qquad e_{2l-1}, \cos\theta_l ie_{2l-1}+\sin\theta_l e_{2l}, (e_k)\}\end{aligned}$$

$\theta_1,\dots,\theta_l$：多重 Kähler 角度

複素空間形の部分多様体の交叉積分公式を次元に関する

ある制限のもとで多重 Kähler 角度 θ_i の関数 $s_j(\cos^2\theta_i)$

で記述 (s_j は基本対称式)

H. Tasaki, Proc. Colloq. Diff. Geom., Debrecen (2001), ...

交叉積分公式

$G/K \supset M_1, M_2$

$$\int_G (M_1 \cap gM_2) \text{ の量 } d\mu(g) = M_1, M_2 \text{ の量}$$

Bernig-Fu は複素空間形の交叉積分公式を $s_j(\cos^2\theta_i)$ を使って一般的に記述、$s_j(\cos^2\theta_i)$ を Tasaki valuation と命名

Bernig and Fu, Ann. Math., (2011)

複素空間形の積分幾何学において Tasaki valuation は基本的役割を果たしている

コンパクト対称空間のイソトロピー作用の軌道

(G, K) : コンパクト対称対

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$: Lie 環の標準分解

$\mathfrak{a}$: $\mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{k \in K} \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a}, \quad G/K = \bigcup_{k \in K} k \mathrm{Exp}\mathfrak{a}$$

K の $\mathfrak{m}$ への作用の軌道の基点は $\mathfrak{a}$ 内でとれる

K の G/K への作用の軌道の基点は $\mathrm{Exp}\mathfrak{a}$ 内でとれる

これらの軌道のなかで特によい性質を持つものに注目し、

弱鏡映部分多様体の概念にいたった

Ikawa, Sakai and Tasaki, J. Math. Soc. Japan (2009)

弱鏡映軌道や austere 軌道等の分類

X : Riemann 多様体

M : X の対合的等長変換 σ の固定点集合の連結成分

M を鏡映部分多様体と呼ぶ。

鏡映部分多様体は全測地的になる。

$x \in M$ と $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して

$$\sigma(x) = x,\ d\sigma_x \xi = -\xi,\ \sigma(M) = M$$

これを少し弱めた条件を考える

$x \in M$ と $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して $\exists \sigma : M$ の等長変換

$$\sigma(x) = x,\ d\sigma_x \xi = -\xi,\ \sigma(M) = M$$

M を弱鏡映部分多様体と呼ぶ。

弱鏡映部分多様体は全測地的になるとは限らない。

M：コンパクト対称空間

s_o：$o \in M$ における点対称

s_o の固定点集合の連結成分を**極地**と呼ぶ。

Chen and Nagano, Duke Math. J. (1978)

極地はコンパクト対称空間の幾何学的性質を調べる上で重要な役割を演じている。

極地：全測地的部分多様体

極地：o におけるイソトロピー群の軌道

極地：極大トーラス内の s_o の固定点を基点に持つ

例 $U(n)$ 内では $U(1)^n$ は極大トーラスになる。

$U(1)^n$ 内の s_{1_n} の固定点：± 1 を成分に持つ対角行列

$U(n)$ の極地：複素 Grassmann 多様体

M : コンパクト対称空間

$M \supset S$: 対蹠集合 $\Leftrightarrow s_x(y) = y \ (x, y \in S)$

$\{|S| \mid M \supset S$: 対蹠集合 $\}$: 有界

最大値 : 2-number $\#_2 M$

2-number を与える対蹠集合 : 大対蹠集合

Chen and Nagano, Duke Math. J. (1988)

例 $\#_2 S^n = 2, \ \#_2 \mathbb{K}P^n = n + 1 \ (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$

上記の例は対称 R 空間であり、一般に対称 R 空間 M に対して次が成り立つ。

M の 2-number$=M$ の $\mathbb{Z}_2$ 係数 Betti 数の総和

$F(s_o, M) = \cup_i M_i$ 各 M_i は極地

$\Rightarrow M_i$: 対称 R 空間 $\#_2 M = \sum_i \#_2 M_i$

Takeuchi, Nagoya Math. J. (1989)

大対蹠集合、2-number の決定： Chen-Nagano
極大対蹠集合の分類： 未完成 (多くの系列で完成)

コンパクト Lie 群の場合
両側不変 Riemann 計量が存在し、コンパクト対称空間
単位元を出発する測地線： 一径数部分群 $s_e(y) = y^{-1}$
単位連結成分において $s_x(y) = x(x^{-1}y)^{-1} = xy^{-1}x$
非連結でも点対称を $s_x(y) = xy^{-1}x$ と定められる

A： 単位元を含む極大対蹠集合
$x \in A \Rightarrow x = s_e(x) = x^{-1}$ よって $x^2 = e$
$x, y \in A \Rightarrow y = s_x(y) = xy^{-1}x$ よって $xy = yx$
$x, y, z \in A \Rightarrow s_z(xy) = zy^{-1}zzx^{-1}z = xy$
A の極大性より $xy \in A$ となり、A は部分群
$$A \cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$$

古典型コンパクト Lie 群、その商群

線形代数、極地を利用した議論

$\Rightarrow$ **極大対蹠部分群の分類**

Tanaka and Tasaki, J. Lie Theory (2017)

古典型コンパクト対称空間、その商空間

1. **古典型コンパクト Lie 群、その商群の極地になる**
2. **そうならない**

1. **極地になる場合**

$G_k(\mathbb{K}^n) \subset U(n, \mathbb{K})$,

$G_m(\mathbb{K}^{2m})/\{\pm 1_{2m}\} \subset U(2m, \mathbb{K})/\{\pm 1_{2m}\}$

極大対蹠部分群の分類 $\Rightarrow$ **極大対蹠集合の分類**

$CI(n) \cong Sp(n)/U(n)$, $DIII(n) \cong SO(2n)/U(n)$

Tanaka and Tasaki, Diff. Geom. App. (2020)

2. そうならない場合

非連結コンパクト Lie 群の極地として実現

G : コンパクト Lie 群、$\pi_0(G) \cong \mathbb{Z}_2$

$g_1 \in G$: 対合的、$G = G_0 \cup G_0 g_1$: 連結成分の和

T_0 : G_0 の極大トーラス

$$G_0 = \bigcup_{g \in G_0} g T_0 g^{-1}$$

連結成分 $G_0 g_1$ において共役類の標準形はあるか？

$G_0 g_1$ において $g \in G$ の共役作用 $x g_1 \mapsto g(x g_1) g^{-1}$ は

Hermann 作用

$$g(xg_1)g^{-1} = gxg_1g^{-1}g_1^{-1}g_1 = (gx(g_1gg_1^{-1})^{-1})g_1$$

$\sigma(g) = g_1gg_1^{-1}$, $\rho_\sigma(g)(x) = gx\sigma(g)^{-1}$ とおくと

$$I_g(xg_1) = g(xg_1)g^{-1} = \rho_\sigma(g)(x)g_1$$

ρ_σ : 自己同型写像 σ による捩れた共役作用

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{R_{g_1}} & G_0g_1 \\ \text{捩れた共役作用}\rightarrow\rho_\sigma(g)\downarrow & & \downarrow I_g\leftarrow\text{共役作用} \\ G_0 & \xrightarrow{R_{g_1}} & G_0g_1 \end{array}$$

一般の自己同型写像 σ による捩れた共役作用は Hermann 作用になる。

G：連結コンパクト Lie 群、 σ：G の自己同型写像

$$\theta_1(g,h) = (\sigma^{-1}(h), \sigma(g)), \quad \theta_2(g,h) = (h,g)$$

θ_1, θ_2 は $G \times G$ の対合的自己同型写像

$$K_1 = \{(g, \sigma(g)) \mid g \in G\}, \quad K_2 = \{(g,g) \mid g \in G\}$$

$(G \times G)/K_2$ は G と同一視できる。

$$(G \times G)/K_2 \ni (g,h)K_2 = (gh^{-1}, e)K_2 \leftrightarrow gh^{-1} \in G$$

K_1 の $(G \times G)/K_2 = G$ への Hermann 作用

$$(g, \sigma(g))(x, e)K_2 = (gx, \sigma(g))K_2 \leftrightarrow gx\sigma(g)^{-1} = \rho_\sigma(g)(x)$$

σ による捩れた共役作用

Ikawa, Tohoku Math. J. (2018)

$$\mathfrak{k}_1 = \{(X, \sigma(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\},\ \mathfrak{m}_1 = \{(X, -\sigma(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\},$$
$$\mathfrak{k}_2 = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}\},\ \mathfrak{m}_2 = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

$\mathfrak{k}_\sigma = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$ とおくと、

$$\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{k}_\sigma\}$$

$\mathfrak{k}_\sigma$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとると、

$$\mathfrak{a} = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{t}\}$$

は $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ の極大可換部分空間になる。

$$(G \times G)/K_2 = \bigcup_{g \in G} (g, \sigma(g)) \exp \mathfrak{a}$$

$(G \times G)/K_2$ と G の同一視に基づいた記述

$$G = \bigcup_{g \in G} \rho_\sigma(g) \exp \mathfrak{t}$$

設定は以下の通り

G : 連結コンパクト Lie 群、σ : G の自己同型写像

$\rho_\sigma(g)(x) = gx\sigma(g)^{-1} \ (g, x \in G)$

$\mathfrak{t}$: $\{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$ の極大可換部分環

σ による捩れた共役作用に関する標準形は、σ の固定点部分群の極大トーラス

$$SO(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \bigcup_{g \in SO(2)} g \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} g^{-1}$$

元の設定に戻る

G：コンパクト Lie 群、$\pi_0(G) \cong \mathbb{Z}_2$

$g_1 \in G$：対合的、$G = G_0 \cup G_0 g_1$：連結成分の和

T_1：$\{g \in G \mid I_{g_1}(g) = g\}$ の極大トーラス

$$G_0 g_1 = \bigcup_{g \in G_0} g(T_1 g_1) g^{-1}$$

G の極地で $G_0 g_1$ に含まれるものを求めるには、$T_1 g_1$ 内の対合的元を決定し、どの元が共役になるか明らかにすればよい。

Tanaka and Tasaki, Contemporary Math. (2022)

G：連結コンパクト Lie 群

σ：G の対合的外部自己同型写像

$\langle\sigma\rangle = \{1, \sigma\} \subset \mathrm{Aut}(G)$, $G \rtimes \langle\sigma\rangle$：半直積

$(g_1, \epsilon_1)(g_2, \epsilon_2) = (g_1\epsilon_1(g_2), \epsilon_1\epsilon_2)\ (g_i \in G, \epsilon_i \in \langle\sigma\rangle)$

(g, σ)：対合的 $\Leftrightarrow \sigma(g) = g^{-1}$

そこで、$M_\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$ とおく。

(M_σ, σ) の各連結成分：(G, σ) 内の $G \rtimes \langle\sigma\rangle$ の極地

$\rho_\sigma(G)e = \{g\sigma(g)^{-1} \mid g \in G\} \subset M_\sigma$：連結成分

$K_\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ とおくと、

$\{g \in G \mid \rho_\sigma(g)e = e\} = K_\sigma$, $\rho_\sigma(G)e \cong G/K_\sigma$

$(\rho_\sigma(g)e, \sigma) = (g\sigma(g)^{-1}, \sigma) = (g, 1)(e, \sigma)(g, 1)^{-1}$

$(\rho_\sigma(G)e, \sigma) = I_{(G,1)}(e, \sigma)$

ρ_σ の e の軌道と半直積内の (e, σ) の共役軌道が対応

$G \rtimes \langle \sigma \rangle$ の極大対蹠部分群の分類

$B_0, B_1 \ldots, B_k$: G 共役類の代表元

$M_1 := \rho_\sigma(G)e$ とおくと (M_1, σ) は (G, σ) 内の極地

$B_0 \cap (M_1, \sigma), B_1 \cap (M_1, \sigma) \ldots, B_k \cap (M_1, \sigma)$:

(M_1, σ) の極大対蹠集合の候補

極大性を確認することで M_1 の極大対蹠集合の分類を得る。

$(M_1, \sigma) = (\rho_\sigma(G)e, \sigma) = I_{(G,1)}(e, \sigma)$

$g \in G$ に対して

$I_{(G,1)}(B_i) \cap (M_1, \sigma) = I_{(G,1)}(B_i \cap (M_1, \sigma))$

以下は現在進行中の田中真紀子さんとの共同研究

$U(n)$ の対合的自己同型写像 $\sigma_I(g) = \bar{g}\ (g \in U(n))$

$\{g \in U(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\}$ は連結：$UI(n)$ と書く

$UI(n) = \rho_{\sigma_I}(U(n))1_n \cong U(n)/O(n)$

$U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極地は (複素 $\mathrm{Grass.}$,1)$(\subset (U(n), 1))$

と $(UI(n), \sigma_I)(\subset (U(n), \sigma_I))$

$(U(n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極大対蹠部分群の分類

$B_0, \ldots, B_k$： 共役類の代表元

$B_0 \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I), \ldots, B_k \cap (UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I)$

： $(UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \sigma_I)$ の極大対蹠集合の候補

極大性を確認することで $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合の分類を得る。

$\boldsymbol{\sigma_I}$ は $SU(n)$ の対合的自己同型写像にもなる

$\{\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{SU(n)} \mid \boldsymbol{\sigma_I(g) = g^{-1}}\}$ は連結： $AI(n)$ と書く

$$\boldsymbol{AI(n) = \rho_{\sigma_I}(SU(n))1_n \cong SU(n)/SO(n)}$$

$\boldsymbol{U(n)}$ の場合と同様の手順で

$(\boldsymbol{SU(n)}/\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\mu}}) \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle$ の極大対蹠部分群の分類

$\boldsymbol{AI(n)}/\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\mu}}$ の極大対蹠集合の分類を得る。

$$J_n := \begin{bmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix} \in SO(2n)$$

$U(2n)$ の対合的自己同型写像 $\sigma_{II} = I_{J_n} \circ \sigma_I$

$\{g \in U(2n) \mid \sigma_{II}(g) = g^{-1}\}$ は連結：$UII(n)$ と書く

$UII(n) = \rho_{\sigma_{II}}(U(2n))1_{2n} \cong U(2n)/Sp(n)$

$U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ の極地は (複素 Grass.,1)

$(\subset (U(2n), 1))$ と $(UII(n), \sigma_{II})(\subset (U(2n), \sigma_{II}))$

$U(n)$ の場合と同様の手順で

$(U(2n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ の極大対蹠部分群の分類

$UII(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合の分類を得る。

σ_{II} は $SU(2n)$ の対合的自己同型写像にもなる

$\{g \in SU(2n) \mid \sigma_{II}(g) = g^{-1}\}$ の連結成分は二つ

1_{2n} を含む連結成分を $AII(n)$ と書く

$AII(n) = \rho_{\sigma_{II}}(SU(2n))1_{2n} \cong SU(2n)/Sp(n)$

$U(n)$ の場合と同様の手順で以下を進めている

$(SU(2n)/\mathbb{Z}_\mu) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ の極大対蹠部分群の分類

$AII(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合の分類