# 複素二次超曲面の二つの実形の交叉

田崎博之　筑波大学数理物質科学研究科

複素二次超曲面の二つの実形 (ある種の全測地的 Lagrange 部分多様体) の交叉が 2-number の小さい方の実形の大対蹠集合であることを示す。その系として、複素二次超曲面の任意の実形は大域的タイトになることがわかる。

**最も簡単な例**　一次元複素二次超曲面は、複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ であり、その実形は実射影直線 $\mathbb{R}P^1$ すなわち大円である。$\mathbb{C}P^1$ 内の異なる二つの大円は二点で交わり、交点は対蹠点の対になっている。この現象の一般化がすべての複素二次超曲面の二つの実形についても成り立つことを示すのが、この講演の目的である。

**実形**　$\bar{M}$ を Hermite 多様体とする。$\bar{M}$ の対合的反正則等長変換の不動点集合を $\bar{M}$ の**実形**と呼ぶ。実形は $\bar{M}$ の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。Hermite 対称空間の実形の例を挙げておく。複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ 内の自然に埋め込まれた実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ は実形である。さらに、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ も実形である。

**複素二次超曲面の実形**　複素二次超曲面は $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の向きの付いた 2 次元線形部分空間全体の成す Grassmann 多様体 $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ と同型になり、自然に $\wedge^2\mathbb{R}^{n+2}$ 内の部分多様体とみなすことができる。$\mathbb{R}^{n+2}$ の正規直交基底 $u_1, u_2, e_1, \dots, e_n$ をとる。$0 \le k \le n$ に対して、$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の部分多様体 $S^{k,n-k}$ を

$$S^{k,n-k} = S^k(\mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_k) \wedge S^{n-k}(\mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}e_{k+1} + \cdots + \mathbb{R}e_n)$$

によって定める。ここで、$S^m(V)$ は $m+1$ 次元実 Euclid 空間 $V$ 内の $m$ 次元単位超球面である。$S^{k,n-k}$ は $(S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$ に等長的になる。正則等長変換で写り合う部分多様体を**合同**ということにする。コンパクト型 Hermite 対称空間内の実形は Leung, 竹内により分類されていて、$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の場合は $S^{k,n-k}$ $(0 \le k \le [n/2])$ のいずれかと合同になる。

**対蹠集合と 2-number**(Chen-長野)　Riemann 対称空間 $M$ の点 $x$ に関する点対称を $s_x$ で表す。$M$ の部分集合 $S$ は、任意の $x, y \in S$ に対して、$s_x y = y$ が成り立つとき、**対蹠集合**という。$M$ の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。$\#_2 M = \#S$ を満たす対蹠集合 $S$ を $M$ の**大対蹠集合**という。

対蹠集合と 2-number に関する例を挙げておこう。$n$ 次元球面 $S^n$ の点 $x$ における点対称 $s_x$ の不動点は $x$ と $-x$ だけなので、$\{x, -x\}$ は $S^n$ の大対蹠集合になる。したがって、$\#_2 S^n = 2$ が成り立つ。$\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $e_1, \dots, e_{n+1}$ をとると、$\{\mathbb{R}e_1, \dots, \mathbb{R}e_{n+1}\}$ は実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の大対蹠集合になり、$\#_2 \mathbb{R}P^n = n+1$ がわか

る。対蹠集合の概念は線形代数における正規直交系の幾何学的拡張とみることができる。他の古典型コンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合もある線形空間の正規直交系と密接に関係している。

**実形の 2-number**　$H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ は $M$ の係数 $\mathbb{Z}_2$ のホモロジー群を表す。$M$ が対称 $R$ 空間ならば $\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ が成り立つ (竹内)。また、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 $R$ 空間である (竹内)。よって、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の 2-number はその $\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジー群全体の次元に一致する。

**定理**　$k$ と $l$ を $0 \leq k \leq l \leq [n/2]$ を満たす整数とする。$L_1$ を $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の $S^{k,n-k}$ と合同な実形とし、$L_2$ を $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の $S^{l,n-l}$ と合同な実形とする。$L_1$ と $L_2$ が横断的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は

$$\{\pm u_1 \wedge u_2, \pm e_1 \wedge e_2, \ldots, \pm e_{2k-1} \wedge e_{2k}\}$$

と合同になる。特に、$L_1 \cap L_2$ は $L_1$ の大対蹠集合になり、その元の個数は $\#_2 L_1 = 2k+2$ に一致する。さらに、$k = l = [n/2]$ ならば、$L_1 \cap L_2$ は $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の大対蹠集合になり、その元の個数は $\#_2 \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) = 2[n/2] + 2$ に一致する。

**証明の概略**　コンパクト対称空間の最小軌跡の性質 (酒井) を使うと実形の交叉は点対称の不動点集合すなわち極地 (Chen-長野) に含まれることがわかる。$o = u_1 \wedge u_2$ とし、$o$ における $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の点対称を $s_o$ で表す。$F(s_o, \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})) = \{o, -o\} \cup \tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)$ となるので、極地による帰納法で定理を証明できる。

**複素射影空間の実形の交叉**　$\mathbb{C}P^n$ の任意の実形は $\mathbb{R}P^n$ と合同になる。$\mathbb{C}P^n$ の実形 $L_1$ と $L_2$ が横断的に交わるならば $\#(L_1 \cap L_2) = n+1$ になることを Howard が示したが、さらに詳しい次の主張が成り立つことがわかる。$\mathbb{C}^{n+1}$ のユニタリ基底 $u_1, \ldots, u_{n+1}$ が存在し、$L_1 \cap L_2 = \{\mathbb{C}u_1, \ldots, \mathbb{C}u_{n+1}\}$ が成り立つ。特に、$L_1 \cap L_2$ は $L_1$ と $L_2$、さらに $\mathbb{C}P^n$ の大対蹠集合になり、その元の個数は $\#_2 \mathbb{R}P^n = \#_2 \mathbb{C}P^n = n+1$ に一致する。

**大域的タイト**　コンパクト Hermite 対称空間 $M$ の Lagrange 部分多様体 $L$ について、$M$ の任意の正則等長変換 $g$ に対して

$$\#(L \cap g \cdot L) = \dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つとき、$L$ を**大域的タイト**という (Oh)。上の Howard の結果から $\mathbb{C}P^n$ の実形は大域的タイトになる。複素二次超曲面のいくつかの実形も大域的タイトになることを入江-酒井は積分幾何学の手法で示している。さらに、上の定理において $k = l$ の場合を考えると、複素二次超曲面の任意の実形も大域的タイトになる。

**コンパクト型 Hermite 対称空間の実形**　一般のコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉についても、東京理科大の田中さんと共同研究を進めていて、上記の定理と類似の結果を得つつある。これについては次の機会に発表したい。