

コンパクト型 Hermite 対称空間の 二つの実形の交叉

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)*¹

田崎 博之 (筑波大学数理物質科学研究科)*²

今回の講演内容は2010年春の学会での講演「複素二次超曲面の二つの実形の交叉」の結果の一般化である。コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形(ある種の全測地的 Lagrange 部分多様体)の交叉がその二つの実形の対蹠集合であることを示す。その二つの実形が合同の場合、その交叉は大対蹠集合になる。さらに既約コンパクト Hermite 対称空間の二つの実形の交叉を記述することもできる。

最も簡単な例 複素射影直線 CP^1 の実形は実射影直線 RP^1 すなわち大円である。 CP^1 内の異なる二つの大円は二点で交わり、交点是对蹠点の対になっている。この現象の一般化がすべてのコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形についても成り立つことを示すのが、この講演の目的である。

実形 $\bar{M}$ を Kähler 多様体とする。 $\bar{M}$ の対合的反正則等長変換の不動点集合を $\bar{M}$ の実形と呼ぶ。実形は $\bar{M}$ の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。Hermite 対称空間の実形の例を挙げておく。複素 Euclid 空間 C^n 内の自然に埋め込まれた実 Euclid 空間 R^n は実形である。さらに、複素射影空間 CP^n 内の自然に埋め込まれた実射影空間 RP^n も実形である。

対蹠集合と 2-number(Chen-長野) Riemann 対称空間 M の点 x に関する点対称を s_x で表す。 M の部分集合 S は、任意の $x, y \in S$ に対して、 $s_x y = y$ が成り立つとき、対蹠集合という。 M の対蹠集合の元の個数の上限を 2-number といい $\#_2 M$ で表す。 $\#_2 M = \#S$ を満たす対蹠集合 S を M の大対蹠集合という。

対蹠集合と 2-number に関する例を挙げておく。 n 次元球面 S^n の点 x における点対称 s_x の不動点は x と $-x$ だけなので、 $\{x, -x\}$ は S^n の大対蹠集合になり、 $\#_2 S^n = 2$ が成り立つ。 R^{n+1} の正規直交基底 $e_1, \dots, e_{n+1}$ をとると、 $\{Re_1, \dots, Re_{n+1}\}$ は実射影空間 RP^n の大対蹠集合になり、 $\#_2 RP^n = n + 1$ がわかる。対蹠集合の概念は線形代数における正規直交系の幾何学的拡張とみることができる。

実形の 2-number $H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ は M の係数 $\mathbb{Z}_2$ のホモロジー群を表す。 M が対称 R 空間ならば $\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ が成り立つ(竹内)。また、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間である(竹内)。よって、コンパクト型 Hermite 対称空間の実形の 2-number はその $\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジー群全体の次元に一致する。

主結果 コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの部分多様体が正則等長変換で写り合うときに、それらは合同であるという。

定理 1 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。 M の二つの実形 L_1, L_2 が横断的に交わるならば、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

*¹ e-mail: tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp

*² e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

定理2 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、 L_1, L_2 を M の横断的に交わる合同な実形とする。このとき、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、 $\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

定理3 M を既約コンパクト Hermite 対称空間とし、 L_1, L_2 を M 内の横断的に交わる二つの実形とする。

- (1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ ($m \geq 2$) であり、 L_1 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、 L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

- (2) それ以外の場合、 $L_1 \cap L_2$ は 2-number が小さい方の実形の大対蹠集合になり、次の等式が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}.$$

証明の概要 コンパクト対称空間の極大トーラスに関する竹内の結果と最小軌跡に関する酒井の結果から、次の補題を導くことができる。

補題4 A をコンパクト対称空間 M の原点 o を通る極大トーラスとする。 A から決まるルート系により基本胞体 $S \subset \mathfrak{a}$ を定める。 $\bar{S}$ はルート系によりある胞体分割 $\bar{S} = \cup_i S_i$ を持つ。 A_1 を M の o を通るもう一つの極大トーラスとし、 $A_1 \cap A \cap \text{Exp} S_i \neq \emptyset$ ならば、 $\text{Exp} S_i \subset A_1 \cap A$ が成り立つ。

前回の学会講演で発表した結果より定理1の L_1, L_2 は必ず交わり、補題4より交叉の形を特定でき、 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になることがわかる。

M をコンパクト対称空間とし、 $p \in M$ とする。 p における点对称 s_p の不動点集合 $F(s_p, M)$ を連結成分に分解し

$$F(s_p, M) = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$$

としたとき、各連結成分 M_j^+ を M の p に関する極地と呼ぶ (Chen-長野)。

M がコンパクト型 Hermite 対称空間の場合、各極地 M_j^+ もコンパクト型 Hermite 対称空間になり、 M の実形 L に対して $L \cap M_j^+ \neq \emptyset$ ならば $L \cap M_j^+$ は M_j^+ の実形になる。さらに o を通り横断的に交わる二つの実形 L_1, L_2 に対して、定理1より $L_1 \cap L_2$ は対蹠集合になるため $L_1 \cap L_2 \subset F(s_o, M)$ が成り立つ。よって

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^r \{(L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+)\}$$

となり、 $L_1 \cap L_2$ の性質は各極地 M_j^+ の二つの実形 $L_1 \cap M_j^+$ と $L_2 \cap M_j^+$ の交叉の性質に帰着できる。これらを利用して極地による数学的帰納法によって定理2と定理3を証明できる。定理3の証明では M の極地 M_j^+ における二つの実形の交叉が既知のものでなければならないので、証明の順序に工夫が必要になる。