

コンパクト型 Hermite 対称空間の 二つの実形の対の Floer ホモロジー

入江 博 (東京電機大学未来科学部)*¹

酒井 高司 (首都大学東京理工学研究科)*²

田崎 博之 (筑波大学数理物質科学研究科)*³

概 要

単調なコンパクト型 Hermite 対称空間 M の 2 つの実形 L_0, L_1 に対して、各々の最小 Maslov 数が 3 以上という条件のもとで、 $\mathbb{Z}_2$ 係数の Floer ホモロジー群 $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を計算する。特に、 M が既約の場合には Oh の先行結果 [2] を含む Arnold-Givental 不等式の一般化が得られることを報告する。

Floer ホモロジー シンプレクティック多様体 (M, ω) の 2 つの Lagrange 部分多様体 L_0, L_1 について、 $L_0 \cap L_1$ を生成元とする自由 $\mathbb{Z}_2$ 加群を $CF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ と表す。2 つの交点に対して、それらをつなぐ孤立した J -holomorphic strip の個数を mod 2 で数えることにより境界作用素 ∂ を定義する。 $\partial^2 = 0$ が示せるとき、 $(CF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2), \partial)$ のホモロジー群 $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を **Floer ホモロジー** という。

実形 (M, J, ω) を Kähler 多様体とする。 M の対合的反正則等長変換の不動点集合を M の**実形**と呼ぶ。実形は M の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。Hermite 対称空間の実形の例を挙げておく。複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は実形である。

単調性と最小 Maslov 数 閉 Lagrange 部分多様体 L について、2 つの準同型 $I_{\mu, L} : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{Z}$, $I_\omega : \pi_2(M, L) \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。 $I_{\mu, L}$ は、各写像 $w : (D^2, \partial D^2) \rightarrow (M, L)$ に対して、単位円盤 D^2 上のシンプレクティックベクトル束 w^*TM と $\partial D^2 \cong S^1$ 上の Lagrange 部分ベクトル束 $(w|_{\partial D^2})^*TL$ との対 $(w^*TM, (w|_{\partial D^2})^*TL)$ の Maslov 指数 $I_{\mu, L}(w)$ を対応させる写像とする。 I_ω は $I_\omega(w) = \int_{D^2} w^*\omega$ で定義する。閉 Lagrange 部分多様体 L は、ある定数 $c > 0$ が存在して $I_\omega = cI_{\mu, L}$ が成り立つとき、**単調**であるという。既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は単調である。単調な L について部分群 $\text{im}(I_{\mu, L}) \subset \mathbb{Z}$ の正の生成元を Σ_L と表し、 L の**最小 Maslov 数**と呼ぶ。

対蹠集合と 2-number (Chen-長野) Riemann 対称空間 M の点 x に関する点対称を s_x で表す。 M の部分集合 S は、任意の $x, y \in S$ に対して、 $s_x y = y$ が成り立つとき、**対蹠集合**という。 M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。 $\#_2 M$ は有限の値になる。 $\#_2 M = \#S$ を満たす対蹠集合 S を M の**大対蹠集合**という。竹内勝の結果よりコンパクト型 Hermite 対称空間の実形 L に対して $\#_2 L = SB(L, \mathbb{Z}_2)$ が成り立つ。ただし、 $SB(L, \mathbb{Z}_2)$ は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジーの Betti 数の総和である。

*¹e-mail: hirie@im.dendai.ac.jp

*²e-mail: sakai-t@tmu.ac.jp

*³e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

主結果

定理 1 (入江) 2次元の複素2次超曲面 $Q_2(\mathbb{C}) \cong S^2(1) \times S^2(1)$ の2つの実形 $S^2(\sqrt{2}), T^2$ について、 $HF(S^2, T^2; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ が成り立つ。

定理 2 (入江-酒井-田崎) (M, J, ω) を単調なコンパクト型 Hermite 対称空間とし、 L_0, L_1 を M の横断的に交わる2つの実形とする。 $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$ ならば

$$HF(L_0, L_1; \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p].$$

M が既約の場合には Tanaka-Tasaki [3] の結果を用いてより詳しい情報が得られる。

定理 3 M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、 L_0, L_1 を M 内の横断的に交わる2つの実形とする。このとき、

- (1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m}) (m \geq 2)$ であり、 L_0 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、 L_1 は $U(2m)$ と合同ならば、

$$HF(L_0, L_1; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^m}.$$

ここで、 $2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_0 < 2^{2m} = \#_2 L_1$ である。

- (2) それ以外の場合には

$$HF(L_0, L_1; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{\#_2 L_0, \#_2 L_1\}}.$$

$HF(L_0, L_1; \mathbb{Z}_2)$ の Hamilton 同位に関する不変性、および竹内勝の結果より、次がわかる。

系 4 定理 3 の仮定の下で (2) の場合、 L_0 と ϕL_1 が横断的に交わるような任意の Hamilton 微分同相 $\phi \in \text{Ham}(M, \omega)$ について、

$$\#(L_0 \cap \phi L_1) \geq \min\{SB(L_0, \mathbb{Z}_2), SB(L_1, \mathbb{Z}_2)\}$$

が成り立つ。とくに、 L_0 と L_1 が合同なとき、既約コンパクト型 Hermite 対称空間の Oh による Arnold-Givental 不等式 [2] が得られる。

定理 2 の証明の方針を述べる。2つの実形 L_0, L_1 が横断的に交わるならば、 $L_0 \cap L_1$ は L_0 と L_1 の対蹠集合になる ([3])。 $L_0 \cap L_1$ の点 x に対して s_x は $L_0 \cap L_1$ の各点を固定する。また、 L_0, L_1 が全測地的であることから、これらは s_x で不変となる。これらの事実から J -holomorphic strip のモジュライ空間に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用が誘導され、境界作用素が 0-map になることが示される。

参考文献

- [1] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993.
- [2] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.
- [3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, preprint (2010).