コンパクト型Hermite対称空間の二つの実形の対のFloerホモロジー

入江　博　　(東京電機大学未来科学部)
酒井高司　　(首都大学東京理工学研究科)
田崎博之　　(筑波大学物質科学研究科)

2011年3月20日

概要

●単調なコンパクト型Hermite対称空間の実形の対 (L_0, L_1) について，$\mathbb{Z}_2$ 係数の Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を計算

↑

● $\boxed{\text{コンパクト型Hermite対称空間 } M \text{ の二つの実形 } L_0 \text{ と } L_1 \text{ の交叉}}$

＝　対蹠集合

(田中真紀子-田崎博之, 2010)

● M のラグランジュ部分多様体 L_0 と L_1 に境界にもつ holomorphic strips の空間に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用

1. 定義と問題

Definition.

(M^{2n}, ω) : **シンプレクティック多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \omega \in \Omega^2(M),\ d\omega = 0,\ \omega^n \neq 0.$

Definition.

$L \subset (M, \omega)$: **ラグランジュ部分多様体**

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \dim L = \frac{1}{2} \dim M,\ \omega|_L = 0.$

Example.

(M, J, ω) : コンパクト型エルミート対称空間

σ : M の対合的な反正則等長変換

$L = \mathrm{Fix}\ \sigma$ （**実形**）

Arnold-Givental不等式（**Y.-G. Oh, 1995**）

(M, J, ω)：コンパクト型エルミート対称空間
$\sigma : M$の対合的な反正則等長変換
$L = \mathrm{Fix}\ \sigma$ （**実形**）
Lは単調で最小Maslov数 $\Sigma_L \geq 2$

$\Rightarrow$ Lと$\phi(L)$が横断的に交わるような任意の
$\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$に対して,

$$\#(L \cap \phi(L)) \geq \sum_i \mathrm{rank} H_i(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ.

$$\uparrow$$

$$HF(L, L : \mathbb{Z}_2) \cong H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

Problem (**Y.-G. Oh, 1993**)
コンパクト型Hermite対称空間Mにおいて，実形L_0とL_1が必ずしも合同でないとき，$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$を計算せよ．

- 実形の対ではないが，

Theorem (Alston, 2008)
複素射影空間$(\mathbb{C}P^n, J, \omega_{FS})$の2つのLagrange 部分多様体である実射影空間$\mathbb{R}P^n$とCliffordトーラス$T^n = \{[z_0 : \cdots : z_n] \mid |z_0| = \cdots = |z_n|\}$ を考える．$n = 2k-1$のとき，

$$HF(\mathbb{R}P^{2k-1}, T^{2k-1} : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^k}.$$

2. 主結果

Theorem 1 (酒井-田崎- I).

(M, J, ω) を**単調な**コンパクト型*Hermite*対称空間とする．L_0, L_1 を M の横断的に交わる2つの実形で，最小*Maslov*数はともに3以上ならば，

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2[p].$$

- $L_0 \cap L_1 = M$ の対蹠集合 **(田中-田崎)**

Definition（Chen-長野，1988）

M：Riemann対称空間

$M \supset S$：部分集合，s_x：点 x に関する点対称

- S が <u>**対蹠集合**</u>

$\overset{\text{def}}{\iff}$ S のすべての点 x, y に対して $s_x y = y$ が成り立つ.

- M の対蹠集合の元の個数の上限を $\#_2 M$ と表す.

<u>**2-number**</u>

3. M が既約の場合

Theorem 2 (酒井-田崎- I).

(1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり，L_0 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同，L_1 は $U(2m)$ と合同ならば，

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{2^m}.$$

(2) それ以外では，

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\min\{\#_2 L_0, \#_2 L_1\}}.$$

- $2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_0 < 2^{2m} = \#_2 L_1.$

- L : 実形 $\Rightarrow$ $\#_2 L = \sum_i \mathrm{rank} H_i(L, \mathbb{Z}_2).$

(竹内勝)

Corollary 3 (酒井-田崎- I).

L_0 と $\phi(L_1)$ が横断的に交わるような任意の $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ に対して,

(1) $M = G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり, L_0 は $G^{\mathbb{H}}_{m}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同, L_1 は $U(2m)$ と合同ならば,

$$\#(L_0 \cap \phi(L_1)) \geq 2^m.$$

(2) それ以外では,

$$\#(L_0 \cap \phi(L_1)) \geq \min\{\sum_i \mathrm{rank} H_i(L_0, \mathbb{Z}_2), \sum_i \mathrm{rank} H_i(L_1, \mathbb{Z}_2)\}.$$

Table.

M	L_0	L_1
$Q_n(\mathbb{C})$	$S^{k,n-k}$	$S^{l,n-l}$
$G^{\mathbb{C}}_{2q}(\mathbb{C}^{2m+2q})$	$G^{\mathbb{H}}_{q}(\mathbb{H}^{m+q})$	$G^{\mathbb{R}}_{2q}(\mathbb{R}^{2m+2q})$
$G^{\mathbb{C}}_{n}(\mathbb{C}^{2n})$	$U(n)$	$G^{\mathbb{R}}_{n}(\mathbb{R}^{2n})$
$G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$	$G^{\mathbb{H}}_{m}(\mathbb{H}^{2m})$	$U(2m)$
$Sp(2m)/U(2m)$	$Sp(m)$	$U(2m)/O(2m)$
$SO(4m)/U(2m)$	$U(2m)/Sp(m)$	$SO(2m)$
$E_6/T\cdot Spin(10)$	$F_4/Spin(9)$	$G^{\mathbb{H}}_{2}(\mathbb{H}^{4})/\mathbb{Z}_2$
$E_7/T\cdot E_6$	$T\cdot(E_6/F_4)$	$(SU(8)/Sp(4))/\mathbb{Z}_2$

ここで，$S^{k,n-k} = (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$.

4. M が可約の場合

Proposition 4.

コンパクト型 *Hermite* 対称空間 (M, J, ω) について, (M, ω) が単調であることと (M, J) が *Kähler-Einstein* であることは同値である.

Example.

$M = \mathbb{C}P^n$ とする.
M の実形 L_0, L_1 は $\mathbb{R}P^n$ と合同である.
$M \times M$ の実形 $L_0 \times L_1$ と $D_\sigma(M)$ について,

$$HF(L_0 \times L_1, D_\sigma(M) : \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{n+1}.$$