

コンパクト型 Hermite 対称空間の 二つの実形の交叉 II

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)*1

田崎 博之 (筑波大学数理物質系)*2

今回の講演内容は 2010 年春の学会での講演「複素二次超曲面の二つの実形の交叉」と 2010 年秋の学会での講演「コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉」に続くものである。これらの講演では、コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形が横断的に交わるとき、それらの交叉は対蹠集合になることを示し、これを利用して既約コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉を詳細に調べ交点数を決定した。今回の講演では、既約ではないコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉を詳細に調べ交点数を決定する。

M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。 M の対合的反正則等長変換の不動点集合を M の実形と呼ぶ。実形は M の連結全測地的 Lagrange 部分多様体になる。既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は Leung と竹内により分類されている。

コンパクト型 Hermite 対称空間 M の等長変換全体の成す群を $I(M)$ で表し、 M の正則等長変換全体の成す群を $A(M)$ で表す。これらの単位連結成分をそれぞれ $I_0(M)$, $A_0(M)$ で表すと $I_0(M) = A_0(M)$ が成り立つ。竹内により $I(M)/I_0(M)$ と $A(M)/A_0(M)$ の構造はわかっている。Leung と竹内による実形の分類は $A(M)$ の作用による同値類の分類である。この分類と $A(M)/A_0(M)$ の情報から次を得る。

命題 1 既約コンパクト型 Hermite 対称空間 M の実形の $A(M)$ の作用による同値類は、 $A_0(M)$ の作用による同値類すなわち合同類と一致する。

補題 2 M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、 $\tau : M \rightarrow M$ を反正則等長変換とする。 $(x, y) \mapsto (\tau^{-1}(y), \tau(x))$ は $M \times M$ の対合的反正則等長変換になり、不動点集合である実形は $D_\tau(M) = \{(x, \tau(x)) \mid x \in M\}$ である。

定義 3 補題 2 の $M \times M$ 内の実形 $D_\tau(M)$ を対角実形と呼ぶ。

命題 4 M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とする。 $I(M) - A(M)$ の元はすべて反正則等長変換になる。さらに $\tau \in I(M) - A(M)$ に $D_\tau(M)$ を対応させることにより、 $I(M) - A(M)$ の連結成分と $M \times M$ の対角実形の合同類は一対一に対応する。

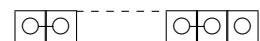
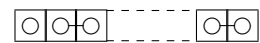
定理 5 コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は既約因子の実形と既約因子から定まる対角実形の積になる。さらに既約因子を M_i で表すと二つの実形の組み合わせは、次の (1) から (4) の積でつくる。

(1) M_i の二つの実形。

(2) 既約因子の番号を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 2s+1$) と実形 $N_1 \subset M_1$, $N_{2s+1} \subset M_{2s+1}$ によって定まる

$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \times N_{2s+1}.$$



*1 e-mail: tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp

*2 e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

これらの交叉は M_1 の二つの実形 N_1 と $(\tau_{2s} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s+1})$ の交叉によって記述でき、交点数は一致する。

- (3) 既約因子の番号を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 2s$) と実形 $N_1 \subset M_1, N_{2s} \subset M_{2s}$ によって定まる

$$\begin{aligned} N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times N_{2s}, & \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ D_{\tau_1}(M_1) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}). & \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

これらの交叉は M_1 の二つの実形 N_1 と $(\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s})$ の交叉によって記述でき、交点数は一致する。

- (4) 既約因子の番号を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 2s-1$) と $\tau_{2s} : M_{2s} \rightarrow M_1$ によって定まる

$$\begin{aligned} D_{\tau_2}(M_2) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}), & \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \\ D_{\tau_1}(M_1) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}). & \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

これらの交叉は $M_1 \times M_{2s}$ 内の対角実形 $D_{\tau_{2s-1} \cdots \tau_1}(M_1)$ と $D_{\tau_{2s}}^{-1}(M_1)$ の交叉によって記述でき、交点数は一致する。

上記定理より、コンパクト型 Hermite 対称空間内の実形の交叉は、既約因子内の実形の交叉と同型な既約因子の積内の対角実形の交叉に帰着する。既約因子内の実形の交叉はすでにわかっている。同型な既約因子の積内の対角実形の交叉に関する結果を述べるために、対蹠集合について用語を復習しておく。Riemann 対称空間 M の点 x に関する点対称を s_x で表す。 M の部分集合 S は、任意の $x, y \in S$ に対して、 $s_x y = y$ が成り立つとき、対蹠集合という。 M の対蹠集合の元の個数の上限を 2-number といい $\#_2 M$ で表す。 $\#_2 M = \#S$ を満たす対蹠集合 S を M の大対蹠集合という。

定理 6 M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、 M の反正則等長変換 τ_1, τ_2 から定まる対角実形 $D_{\tau_1}(M), D_{\tau_2^{-1}}(M) \subset M \times M$ の交叉が離散的になると仮定する。

- (1) $M = Q_{2m}(\mathbb{C})$ ($m \geq 2$) であり、 $\tau_2 \tau_1$ が $A_0(M)$ に含まれないならば、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2m < 2m + 2 = \#_2 M.$$

- (2) $M = G_m(\mathbb{C}^{2m})$ ($m \geq 2$) であり、 $\tau_2 \tau_1$ が $A_0(M)$ に含まれないならば、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 M.$$

- (3) それ以外の場合、 $D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)$ は $D_{\tau_1}(M), D_{\tau_2^{-1}}(M)$ の大対蹠集合になり、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = \#_2 M.$$