

複素旗多様体内の実旗多様体の交叉の構造

入江 博 (東京電機大学未来科学部)*¹

酒井 高司 (首都大学東京理工学研究科)*²

田崎 博之 (筑波大学数理物質系)*³

Kähler 多様体において対合的反正則等長変換の不動点集合として与えられる部分多様体を実形と呼ぶ．定義から実形は全測地的 Lagrange 部分多様体になる．コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉は対蹠集合になることが田崎 [5], 田中-田崎 [4] により示されている．コンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合の概念は Chen-Nagano [2] によって導入された．Sánchez [3] は複素旗多様体に対して k 対称空間の構造を用いて対蹠集合を定義し, Berndt-Console-Fino [1] は複素旗多様体の対蹠集合の性質とその個数について調べている．本講演ではまず複素旗多様体の対蹠集合の構造について述べる．さらに, 複素ベクトル空間内の複素部分空間の列のなす複素旗多様体において, 二つの実旗多様体の交叉を決定し, 横断的に交わるならば交叉は極大対蹠集合になることを報告する．

G を連結コンパクト Lie 群とし, その Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする． $H(\neq 0) \in \mathfrak{g}$ をとり, H を通る G の随伴表現の軌道 $\text{Ad}(G)H$ を考える． $\text{Ad}(G)H$ は G 不変な複素構造をもち, 複素旗多様体と呼ばれる．複素旗多様体 $\text{Ad}(G)H$ に対してある自然数 k_0 が定まり, $k \geq k_0$ なる任意の k に対して $\text{Ad}(G)H$ には k 対称空間の構造が入る． $\text{Ad}(G)H$ の点 x における次数 k の点対称を s_x と表す．部分集合 $A \subset \text{Ad}(G)H$ に対して, 任意の $x, y \in A$ について $s_x(y) = y$ が成り立つとき, A を対蹠集合と呼ぶ．この定義は $\text{Ad}(G)H$ がコンパクト型 Hermite 対称空間の場合には, [2] の定義と一致している．

定理 1. $\text{Ad}(G)H$ の任意の点 x に対して, s_x による不動点集合 $F(s_x, \text{Ad}(G)H)$ は

$$F(s_x, \text{Ad}(G)H) = \{y \in \text{Ad}(G)H \mid [x, y] = 0\}$$

となる．特に, $F(s_x, \text{Ad}(G)H)$ は $k \geq k_0$ なる k に依らない．

定理 2. $\text{Ad}(G)H$ の対蹠集合 A に対し, $\mathfrak{g}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{t}$ が存在し, $A \subset \text{Ad}(G)H \cap \mathfrak{t}$ となる．特に, $\text{Ad}(G)H \cap \mathfrak{t}$ は極大対蹠集合になる．さらに, この集合は $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の軌道になり, 有限集合である．特に, $\text{Ad}(G)H$ のすべての極大対蹠集合は G の作用によって互いに共役である．

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする． $n_1 + \cdots + n_r < n$ をみたす自然数 $n_1, \dots, n_r, n$ に対して, 旗多様体 $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{K}^n)$ を

$$F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{K}^n) = \left\{ (V_1, \dots, V_r) \left| \begin{array}{l} V_i \text{ は } \mathbb{K}^n \text{ の } \mathbb{K} \text{ 部分空間} \\ \dim V_i = n_1 + \cdots + n_i \\ V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \end{array} \right. \right\}$$

によって定義する．実部分空間を複素化して埋め込み $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{R}^n) \subset F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{C}^n)$ を定める． $\mathbb{C}^n$ の複素共役は $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{C}^n)$ 上に対合的反正則写像 σ を誘導し, σ による不動点

*¹ e-mail: hirie@im.dendai.ac.jp

*² e-mail: sakai-t@tmu.ac.jp

*³ e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

集合が $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{R}^n)$ になる . $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{C}^n)$ には $U(n)$ が推移的に作用し , $(\mathbb{C}^{n_1}, \mathbb{C}^{n_1+n_2}, \dots, \mathbb{C}^{n_1+\dots+n_r})$ における固定部分群は $U(n_1) \times \dots \times U(n_{r+1})$ となる . ここで , $n_{r+1} = n - (n_1 + \dots + n_r)$ である . したがって , $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{C}^n)$ は $U(n)/(U(n_1) \times \dots \times U(n_{r+1}))$ と微分同型になる .

定理 3. $u \in U(n)$ に対して ,

$$uw_i = z_i v_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

をみたす $z_i \in U(1)$ ($1 \leq i \leq n$) と $\mathbb{R}^n$ の正の向きの正規直交基底 $v_1, \dots, v_n$ と $w_1, \dots, w_n$ が存在する . $z_i = \pm z_j$ のとき $i \sim j$ と定義し , この同値関係 $\sim$ によって $\{1, \dots, n\}$ を

$$\{1, \dots, n\} = N_1 \cup \dots \cup N_s$$

と類別する . このとき , $F_k(\mathbb{C}^n)$ において

$$F_k(\mathbb{R}^n) \cap F_k(u\mathbb{R}^n) = \bigcup_{\substack{k_1+\dots+k_s=k \\ 0 \leq k_a \leq \#N_a (1 \leq a \leq s)}} F_{k_1} \left(\bigoplus_{i_1 \in N_1} \langle v_{i_1} \rangle_{\mathbb{R}} \right) \times \dots \times F_{k_s} \left(\bigoplus_{i_s \in N_s} \langle v_{i_s} \rangle_{\mathbb{R}} \right)$$

が成り立つ . さらに , $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{C}^n)$ において

$$\begin{aligned} & F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1, \dots, n_r}(u\mathbb{R}^n) \\ &= \{(V_1, \dots, V_r) \in F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{C}^n) \mid V_i \in F_{n_1+\dots+n_i}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1+\dots+n_i}(u\mathbb{R}^n) \ (1 \leq i \leq r)\} \end{aligned}$$

が成り立つ . 特に , $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{R}^n)$ と $F_{n_1, \dots, n_r}(u\mathbb{R}^n)$ が横断的に交わる必要十分条件は ,

$$i \neq j \implies z_i \neq \pm z_j$$

である . このとき

$$\begin{aligned} & F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{R}^n) \cap F_{n_1, \dots, n_r}(u\mathbb{R}^n) \\ &= \{(\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n_1}} \rangle_{\mathbb{C}}, \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n_1+n_2}} \rangle_{\mathbb{C}}, \dots, \langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n_1+\dots+n_r}} \rangle_{\mathbb{C}}) \\ &\quad \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{n_1} \leq n, 1 \leq i_{n_1+1} < \dots < i_{n_1+n_2} \leq n, \dots, \\ &\quad 1 \leq i_{n_1+\dots+n_{r-1}+1} < \dots < i_{n_1+\dots+n_r} \leq n, \\ &\quad \#\{i_1, \dots, i_{n_1+\dots+n_r}\} = n_1 + \dots + n_r\} \end{aligned}$$

となり , 交叉は $F_{n_1, \dots, n_r}(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合になる .

参考文献

- [1] J. Berndt, S. Console and A. Fino, *On index number and topology of flag manifolds*, Differential Geom. Appl., **15** (2001), 81–90.
- [2] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.
- [3] C. Sánchez, *The invariant of Chen-Nagano on flag manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **118**, No.4 (1993), 1237–1242.
- [4] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, to appear in J. Math. Soc. of Japan.
- [5] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.