

有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合

田崎 博之 (筑波大学数理物質系)*

最近数年間コンパクト型 Hermite 対称空間や対称 R 空間の対蹠集合に関連する研究発表を行ってきた。これらの成果はコンパクト型 Hermite 対称空間の対蹠集合の持つよい性質によるものと思われる。これに対して標題の有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合はかなり異なる性質を持っているようである。この講演では、 $\mathbb{R}^n$ 内の向きの付いた k 次元部分空間全体の成す有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合が、 $\{1, 2, \dots, n\}$ のある条件を満たす部分集合の族と対応することを示す。さらに、 $k \leq 4$ の場合の分類を与える。

コンパクト Riemann 対称空間 M の点 x における点対称を s_x で表す。部分集合 $S \subset M$ の任意の元 x, y が $s_x(y) = y$ を満たすとき、 S を M の対蹠集合という。対蹠集合は有限集合になり、その元の個数は上に有界になる。そこで $\#_2 M = \max\{\#S \mid S \text{ は } M \text{ の対蹠集合}\}$ によって、 M の 2-number $\#_2 M$ を定める。2-number を与える対蹠集合を大対蹠集合という。以上の定義は Chen-Nagano による。

$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元部分空間全体の成す Grassmann 多様体を $G_k(\mathbb{R}^n)$ で表す。 $G_k(\mathbb{R}^n)$ には標準的な計量があり、それに関して Riemann 対称空間になる。 $G_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合は、 $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $v_1, \dots, v_n$ によって

$$\{\langle v_{\alpha(1)}, \dots, v_{\alpha(k)} \rangle \mid \alpha \in \text{Inc}_k(n)\}$$

と表示できる。ここで、 $\text{Inc}_k(n)$ は $\{1, \dots, k\}$ から $\{1, \dots, n\}$ への単調増加写像の全体である。Riemann 多様体 X の部分集合 S_1, S_2 が X の等長変換全体の単位連結成分の元で写り合うとき、 S_1, S_2 は合同であるという。すると上記極大対蹠集合同士は合同になり、大対蹠集合になる。特に $\#_2 G_k(\mathbb{R}^n) = \#\text{Inc}_k(n) = \binom{n}{k}$ が成り立つ。

二重被覆写像 $p: \tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ を向きを忘れる対応によって定める。 $P_k(n) = \{X \subset \{1, \dots, n\} \mid \#X = k\}$ とおくと、 $\text{Inc}_k(n)$ と $P_k(n)$ を自然に同一視できる。 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ を自然な対応によって外積の空間 $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ に埋め込んでおく。 $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{v} = \{v_i\}$ をとり、 $\alpha \in P_k(n)$ に対して $\vec{v}_\alpha = v_{\alpha(1)} \wedge \dots \wedge v_{\alpha(k)}$ とおく。すると、 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の点対称は

$$s_{\vec{v}_\alpha}(\vec{v}_\beta) = (-1)^{\#(\beta - \alpha)} \vec{v}_\beta \quad (\alpha, \beta \in P_k(n))$$

を満たす。そこで、 $\alpha, \beta \in P_k(n)$ に対して $\#(\beta - \alpha)$ が偶数になるとき、 α, β は対蹠的という。部分集合 $A \subset P_k(n)$ の任意の二元 $\alpha, \beta \in A$ が対蹠的になるとき、 A を対蹠的という。これと上記二重被覆写像を利用することにより、次の定理を得る。

定理 1 $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\mathbf{v} = \{v_i\}$ と $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合 A に対して、 $\{\pm \vec{v}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合になる。逆に $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の任意の極大対蹠集合はこのようにして得られる。

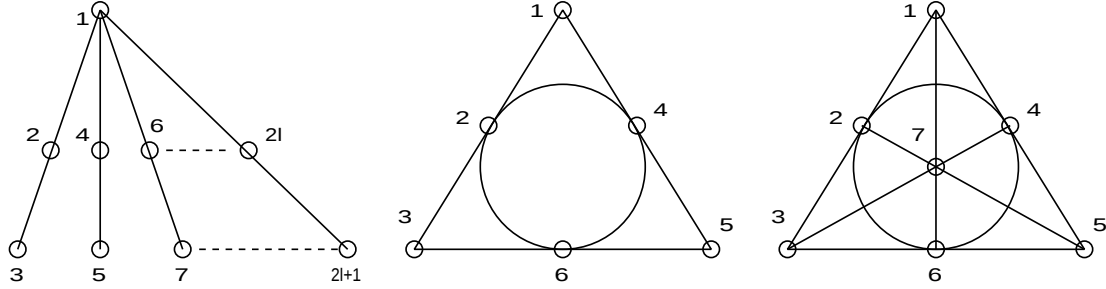
$P_k(n)$ の部分集合 A_1, A_2 が $\{1, \dots, n\}$ の置換で写り合うとき、 A_1, A_2 は合同であるという。 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の合同類の分類は、 $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合の合同類の分類に帰着することもわかる。 $k \leq 4$ の場合の分類結果は以下のとおり。

* e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

$k = 1$ の場合、 $\{\{1\}\}$ が唯一の $P_1(n)$ の極大対蹠的部分集合の合同類の代表元であり、対応する $\tilde{G}_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$ の対蹠集合は $\{\pm x\}$ である。よって、 $\#_2 S^{n-1} = 2$ である。

$k = 2$ の場合、 $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2[n/2] - 1, 2[n/2]\}\}$ が唯一の $P_2(n)$ の極大対蹠的部分集合の合同類の代表元である。よって、 $\#_2 \tilde{G}_2(\mathbb{R}^n) = 2[n/2]$ である。

$k = 3$ の場合、 $P_3(n)$ の対蹠的部分集合 $A(3, 2l + 1)$, $B(3, 6)$, $B(3, 7)$ を次のように定める。 $B(3, 7)$ の交叉の構造は二元体 $\{0, 1\}$ 上の射影平面の射影直線全体と同じである。



定理 2 $l = [(n - 1)/2]$ とする。 $P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合のすべての合同類の代表元は以下のとおり。

n	3, 4	5	6	7, 8	9 以上
	$A(3, 3)$	$A(3, 5)$	$B(3, 6)$	$B(3, 7)$	$A(3, 2l + 1), B(3, 7)$

系 3

n	4	5	6	7, ..., 16	17 以上
$\#_2 \tilde{G}_3(\mathbb{R}^n)$	2	4	8	14	$2[(n - 1)/2]$

$\alpha \in P_k(n)$ に対して $\vec{v}_\alpha^* = v_{\alpha(1)}^* \wedge \dots \wedge v_{\alpha(k)}^*$ とおく。 $\sum_{\alpha \in B(3,6)} \epsilon_\alpha \vec{v}_\alpha^*$ ($\epsilon_\alpha = \pm 1$) は $\mathbb{R}^6 = \mathbb{C}^3$

上の特殊 Lagrange 3 次交代形式であり、 $SU(3)$ 不変である。 $\sum_{\alpha \in B(3,7)} \vec{v}_\alpha^*$ は $\mathbb{R}^7 = \text{Im} \mathbb{O}$ 上

の G_2 不変 3 次交代形式であり、Harvey-Lawson が発見した calibration である。 G_2 は八元数体 $\mathbb{O}$ の自己同型群であり、1 を固定するので $\text{Im} \mathbb{O}$ に働く。

$k = 4$ の場合、 $P_4(n)$ の対蹠的部分集合 $A(4, 2l)$, $B(4, 7)$, $B(4, 8)$ を次のように定める。

$$A(4, 2l) = \{\alpha \cup \beta \in P_4(2l) \mid \alpha, \beta \in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2l - 1, 2l\}\}\},$$

$$B(4, 7) = \{\alpha^c \mid \alpha \in B(3, 7)\},$$

$$B(4, 8) = B(4, 7) \cup \{\alpha \cup \{8\} \mid \alpha \in B(3, 7)\}.$$

定理 4 $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合のすべての合同類の代表元は、 $A(4, 2l)$ ($l \geq 2, \neq 4$), $B(4, 7)$, $B(4, 8)$ と合同なもののしかるべき合併でつくる。

系 5

n	5	6	7	8, ..., 11	12 以上
$\#_2 \tilde{G}_4(\mathbb{R}^n)$	2	6	14	28	$[n/2]([n/2] - 1)$

$\sum_{\alpha \in A(4,2l)} \vec{v}_\alpha^* = \frac{1}{2} \omega^2$ が成り立ち、 $U(l)$ 不変 4 次交代形式である。ここで、 ω は $\mathbb{R}^{2l} = \mathbb{C}^l$

上の Kähler 形式である。 $\sum_{\alpha \in B(4,8)} \epsilon_\alpha \vec{v}_\alpha^*$ は $\mathbb{R}^8 = \mathbb{H}^2$ 上の Kraines が発見した $Sp(2)Sp(1)$

不変 4 次交代形式である。