有向実 Grassmann 多様体の対蹠集合

田崎博之

筑波大学

2013 年 9 月 24 日

定義 (Chen-長野)

M : Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ s_x(y) = y$

M の **2-number** $\#_2 M$

$\#_2 M = \max\{\#S \mid S$ は M の対蹠集合$\}$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#S = \#_2 M$

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$：有向実 Grassmann 多様体

$P_k(n) := \{A \subset \{1, \ldots, n\} \mid \# A = k\}$

$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $v = \{v_i\}$, $A \subset P_k(n)$

$\mathcal{A}_v(A) = \{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(k)} \mid \alpha \in A\}$

定義　$A \subset P_k(n)$：対蹠的

$\Leftrightarrow \#(\beta - \alpha)$：偶数 $(\alpha, \beta \in A)$

定理　$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合は次の形

$\exists A$：$P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合

$\exists v$：$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底　$\mathcal{A}_v(A)$

$\tilde{\boldsymbol{G}}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合

$\leftrightarrow \boldsymbol{P}_k(\boldsymbol{n})$ の極大対蹠的部分集合

$\boldsymbol{k} = \mathbf{1}$ の場合

$\{\{1\}\}$: $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{n})$ の極大対蹠的部分集合

$\boldsymbol{k} = \mathbf{2}$ の場合

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{2}, \mathbf{2}\boldsymbol{l}) = \{\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}, \ldots, \{\mathbf{2}\boldsymbol{l} - \mathbf{1}, \mathbf{2}\boldsymbol{l}\}\}$$

: $\boldsymbol{P}_2(\mathbf{2}\boldsymbol{l}), \boldsymbol{P}_2(\mathbf{2}\boldsymbol{l} + \mathbf{1})$ の極大対蹠的部分集合

$$\sum_{\alpha \in A(2,2l)} \vec{v}_\alpha^*$$

$$= v_1^* \wedge v_2^* + \cdots + v_{2l-1}^* \wedge v_{2l}^*$$

: $\mathbb{C}^l$ の Kähler 形式

$U(l)$ 不変 2 次交代形式

$\boldsymbol{k = 3}$の場合

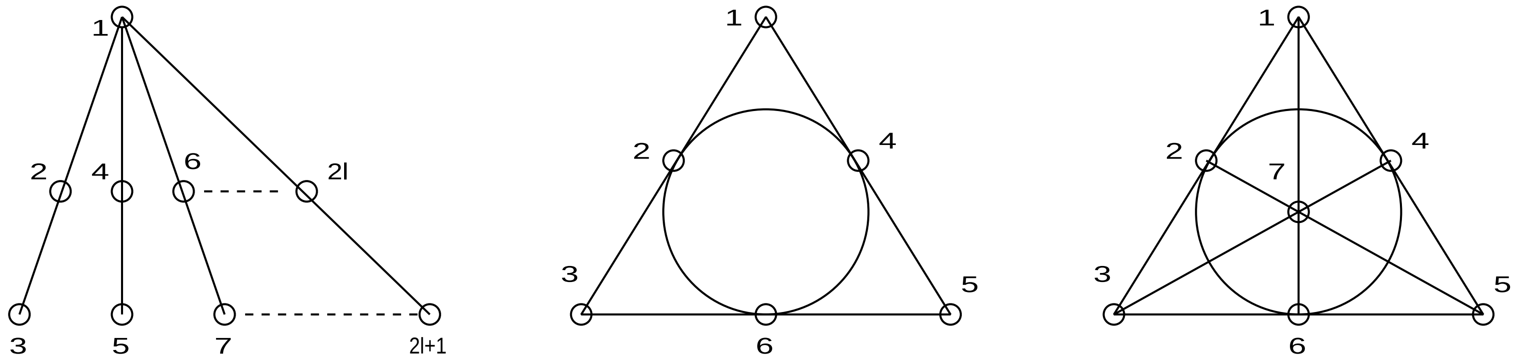


Figure 1: $\boldsymbol{A(3, 2l+1)}$, $\boldsymbol{B(3,6)}$ and $\boldsymbol{B(3,7)}$

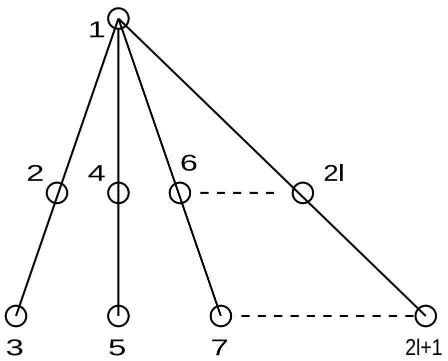
$$\boldsymbol{A(3,5) \subset B(3,6) \subset B(3,7),}$$
$$\boldsymbol{A(3,5) \subset A(3,7) \subset B(3,7).}$$

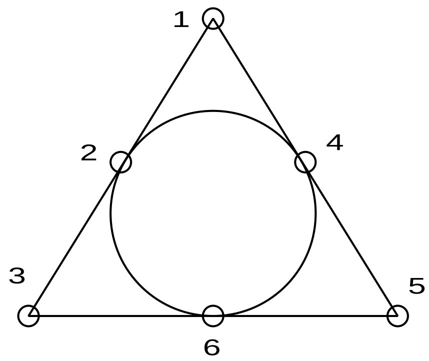
定理　$l = [(n-1)/2]$

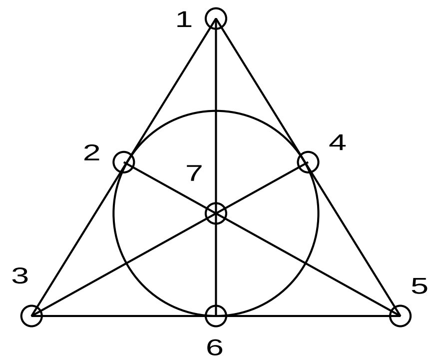
$P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合：

n	$3, 4$	5	6	$7, 8$
	$A(3,3)$	$A(3,5)$	$B(3,6)$	$B(3,7)$

n	9 以上
	$A(3, 2l+1), B(3,7)$







$$\sum_{\alpha \in B(3,6)} \epsilon_\alpha \vec{v}^*_\alpha \qquad (\epsilon_\alpha = \pm 1)$$

: $\mathbb{C}^3$ 上の特殊 Lagrange 3 次交代形式

: $SU(3)$ 不変

$$\sum_{\alpha \in B(3,7)} \vec{v}^*_\alpha$$

: Im$\mathbb{O}$ 上の G_2 不変 3 次交代形式

(Harvey-Lawson が発見)

G_2 は八元数体 $\mathbb{O}$ の自己同型群であり、1 を固定するので Im$\mathbb{O}$ に働く

$\boldsymbol{k = 4}$の場合

$$\boldsymbol{A(4, 2l) = \{\alpha \cup \beta \in P_4(2l) \mid \alpha, \beta}$$
$$\boldsymbol{\in \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2l-1, 2l\}\}\},}$$
$$\boldsymbol{B(4, 7) = \{\alpha^c \mid \alpha \in B(3, 7)\},}$$
$$\boldsymbol{B(4, 8) = B(4, 7) \cup B(3, 7) \times \{\{8\}\}.}$$

これらは$\boldsymbol{P_4(n)}$の対蹠的部分集合。

ただし

$$\boldsymbol{B(3, 7) \times \{\{8\}\} = \{\alpha \cup \{8\} \mid \alpha \in B(3, 7)\}}$$

定理　$\boldsymbol{A(4,2l)}$ $\boldsymbol{(l \geq 2, \neq 4)}$, $\boldsymbol{B(4,7)}$, $\boldsymbol{B(4,8)}$ と合同なもののしかるべき合併で $\boldsymbol{P_4(n)}$ の極大対蹠的部分集合はつきる。

$$\sum_{\alpha \in A(4,2l)} \vec{v}_\alpha^* = \frac{1}{2}\omega^2$$

ここで ω は $\mathbb{C}^l$ 上の Kähler 形式

$$\sum_{\alpha \in B(4,8)} \epsilon_\alpha \vec{v}_\alpha^* \qquad (\epsilon_\alpha = \pm 1)$$

: $\mathbb{H}^2$ 上の $Sp(2)Sp(1)$ 不変 4 次交代形式