対蹠的部分集合の系列と評価

田崎 博之　(筑波大学数理物質系)*

2013 年秋の学会の講演で、$\mathbb{R}^n$ 内の向きの付いた k 次元部分空間全体の成す有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合が、$\{1, 2, \dots, n\}$ のある条件を満たす部分集合の族と対応することを示し、これを利用して、$k \le 4$ の場合の極大対蹠集合の分類を与えた。Riemann 対称空間内の対蹠集合の概念は Chen-Nagano [1] が導入した概念である。上記分類は論文 [3] で発表した。今回は、この分類に現れた系列を一般化し、さらにそれらを利用して対蹠的部分集合の元の個数の評価を行う。

$\{1, \dots, n\}$ の k 個の元からなる部分集合の全体を $P_k(n)$ で表す。

定義 1([3])　$P_k(n)$ の元 α, β に対して差集合 $\alpha - \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\}$ の元の個数 $\#(\alpha - \beta)$ が偶数になるとき、α, β は**対蹠的**であるという。部分集合 $A \subset P_k(n)$ の任意の二元が対蹠的であるとき、A を**対蹠的**という。$P_k(n)$ の二つの部分集合が $\{1, \dots, n\}$ の置換によって写り合うとき、それら二つの部分集合を**合同**という。

前回の講演では、$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の合同類全体と $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合 (MAS) の合同類全体が対応することを示し、$P_k(n)$ $(k \le 4)$ の極大対蹠的部分集合の合同類を分類した。その分類に現れる系列を一般化して次の対蹠的部分集合の系列を得る。

$$\begin{aligned}
&A(2k, 2l) = \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \in P_{2k}(2l) \mid \alpha_i \in \{\{1, 2\}, \dots, \{2l-1, 2l\}\}\} \\
&A(2k+1, 2l+1) = \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k, 2l)\} \subset P_{2k+1}(2l+1) \\
&Ev_{2m} = \{\{\alpha(1), \dots, \alpha(m)\} \mid \alpha(i) \in \{2i-1, 2i\}\ (1 \le i \le m), \text{偶数の}\ \alpha(i)\ \text{は偶数個}\} \\
&\qquad \subset P_m(2m)
\end{aligned}$$

定理 2([4])　$l \ge 3k+1$ のとき、
(1) $A(2k, 2l)$ は $P_{2k}(2l), P_{2k}(2l+1)$ の MAS である。
(2) $A(2k+1, 2l+1)$ は $P_{2k+1}(2l+1), P_{2k+1}(2l+2)$ の MAS である。

定理 3([4])　(1) $2m \equiv 2, 4, 6 (\mathrm{mod} 8)$ のとき、Ev_{2m} は $P_m(2m)$ の MAS である。
(2) Ev_{8m} は $P_{4m}(8m)$ の MAS ではなく、$A(4m, 8m) \cup Ev_{8m}$ は $P_{4m}(8m)$ の MAS である。

定義 4([4], [5])　$a(k, n) = \max\{\#A \mid A\ \text{は}\ P_k(n)\ \text{の対蹠的部分集合}\}$

補題 5([4], [5])

$$a(2k, n) \ge \#A(2k, 2[n/2]) = \binom{[n/2]}{k},$$

$$a(2k+1, n) \ge \#A(2k+1, [(n-1)/2]+1) = \binom{[(n-1)/2]}{k}.$$

* e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

論文 [3] で得た $P_k(n)$ $(k \leq 4)$ の極大対蹠的部分集合の分類結果より、以下を得る。

$$a(1,n) = 1, \quad a(2,n) = [n/2]$$

n	4	5	6	$7,\ldots,16$	17 以上
$a(3,n)$	1	2	4	7	$[(n-1)/2]$

n	5	6	7	$8,\ldots,11$	12 以上
$a(4,n)$	1	3	7	14	$\binom{[n/2]}{2}$

$k = 1, 2$ の場合に対応する有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_1(\mathbf{R}^n)$ は $n-1$ 次元球面であり、$\tilde{G}_2(\mathbf{R}^n)$ は $n-1$ 次元複素射影空間内の複素二次超曲面である。特にこれらは対称 R 空間であり、その中の対蹠集合は [2] で示したよい性質を持っている。それに対して $k \geq 3$ の場合の $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$ $(2k \leq n)$ は対称 R 空間ではなく、対蹠集合はどのようなものがあるのか明らかになっていなかった。[3] により $k \leq 4$ の場合、対蹠集合は明らかになり、大きな n に対しては補題 5 の等号が成り立つことがわかった。さらに、最大値 $a(3,n)$ を与える $P_3(n)$ の対蹠的部分集合は $A(3, 2[(n-1)/2]+1)$ に合同であり、最大値 $a(4,n)$ を与える $P_4(n)$ の対蹠的部分集合は $A(4, 2[n/2])$ に合同であるこもとわかる。$k = 5$ の場合にこれらと同様の結果を与えるのが次の定理である。

定理 6([5]) $n \geq 57$ ならば

$$a(5,n) = \#A\,(5, 2[(n-1)/2]+1) = \binom{[(n-1)/2]}{2}.$$

さらに、最大値 $a(5,n)$ を与える $P_5(n)$ の対蹠的部分集合は $A\,(5, 2[(n-1)/2]+1)$ に合同である。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

[3] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, Internat. J. Math. 24 no.8 (2013), 1350061-1-28.

[4] H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds, to appear in Proceedings in Mathematics and Statistics

[5] H. Tasaki, Estimates of antipodal subsets, preprint