対蹠的部分集合の系列と評価

田崎博之

筑波大学

2014 年 9 月 25 日

1　導入

Riemann 対称空間内の対蹠集合

: Chen-長野によって導入された概念

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$A \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow s_x(y) = y \quad (x, y \in A)$

対称 R 空間の場合

対蹠集合の全体

: よくわかっている (Chen-長野、竹内)

対称 R 空間ではない場合

対蹠集合の全体

: あまりよくわかっていない

対称 R 空間ではない典型的例

階数 3 以上の有向実 Grassmann 多様体

2　2013年秋の学会の発表内容

$P_k(n) = \{\alpha \subset \{1, \ldots, n\} \mid \#\alpha = k\}$

$\alpha - \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\} \qquad (\alpha, \beta \in P_k(n))$

α, β : **対蹠的** $\Leftrightarrow \#(\alpha - \beta)$: **偶数**

$A \subset P_k(n)$: **対蹠的**

$\Leftrightarrow \alpha, \beta$: **対蹠的** $(\alpha, \beta \in A)$

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$: $\mathbb{R}^n$ **内の** k **次元有向部分空間全体**

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ **の極大対蹠集合の分類**

$\leftrightarrow P_k(n)$ **の極大対蹠的部分集合の分類**

MAS：極大対蹠的部分集合

$k \leq 4$ のとき

$P_k(n)$ の MAS の分類完成

分類に現れる MAS

$\downarrow$ 一般化

$k > 4$ のときの $P_k(n)$ の MAS

：分類または性質を調べる

3 対蹠的部分集合の系列

$$A(2,2l) = \{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2l-1,2l\}\}$$

$$\begin{aligned} &A(2k,2l) \\ &= \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \mid \alpha_i \in A(2,2l), \alpha_i \neq \alpha_j\} \\ &\qquad \subset P_{2k}(2l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A(2k+1,2l+1) \\ &= \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k,2l)\} \\ &\qquad \subset P_{2k+1}(2l+1) \end{aligned}$$

定理

$A(2k,2l), A(2k+1,2l+1)$: AS

$l \geq 3k+1 \Rightarrow$

$A(2k,2l)$

: MAS in $P_{2k}(2l)$, $P_{2k}(2l+1)$

$A(2k+1,2l+1)$

: MAS in $P_{2k+1}(2l+1)$,

$P_{2k+1}(2l+2)$

$$\begin{aligned} Ev_{2m} = \{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \mid \alpha_i \in \{2i-1, 2i\} \\ (1 \leq i \leq m)\ \#(\text{偶数の}\ \alpha_i) : \text{偶数}\} \\ \subset P_m(2m) \end{aligned}$$

定理

Ev_{2m} : AS

(1) $2m \equiv 2, 4, 6 (\mathrm{mod} 8)$ のとき、

Ev_{2m} : MAS in $P_m(2m)$

(2)

Ev_{8m} : MAS ではない in $P_{4m}(8m)$

$A(4m, 8m) \cup Ev_{8m}$ MAS in $P_{4m}(8m)$

4　対蹠的部分集合の評価

$$a(k,n) = \max\{\#A \mid A : \text{ AS in } P_k(n)\}$$

$$a(1,n) = 1 \qquad a(2,n) = [n/2]$$

$$a(2k,n) \geq \#A\left(2k, 2\left[\frac{n}{2}\right]\right) = \binom{[n/2]}{k},$$

$$a(2k+1,n) \geq \#A\left(2k+1, 2\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)$$

$$= \binom{[(n-1)/2]}{k}.$$

$k \leq 4$ の場合の分類結果の観察

$$n \geq 17 \Rightarrow a(3,n) = \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

$$A \subset P_3(n) : \text{AS},\ \#A = \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

$$\Rightarrow A : A\left(3, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1\right)$$ と合同

$$n \geq 12 \Rightarrow a(4,n) = \binom{[n/2]}{2}$$

$$A \subset P_4(n) : \text{AS},\ \#A = \binom{[n/2]}{2}$$

$$\Rightarrow A : A\left(4, 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$ と合同

定理

$$n \geq 57 \Rightarrow a(5,n) = \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{2}$$

$A \subset P_5(n)$：対蹠的、$\#A = \binom{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{2}$

$\Rightarrow A$: $A\left(5, 2\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+1\right)$ と合同