複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉

井川 治　(京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科)
入江 博　(東京電機大学未来科学部)
奥田 隆幸　(広島大学大学院理学研究科)
酒井 高司　(首都大学東京大学院理工学研究科)
田崎 博之　(筑波大学数理物質系)

Kähler 多様体において対合的反正則等長変換の不動点集合の連結成分として与えられる部分多様体を**実形**と呼ぶ。定義から実形は全測地的 Lagrange 部分多様体になる。コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉は離散的なとき対蹠集合になることを田崎 [7]、田中-田崎 [5, 6] が示し、これを利用して入江-酒井-田崎 [4] は二つの実形に関する $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジーを求めた。また井川-田中-田崎 [3] は二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件を対称三対の言葉で記述し、離散的なときの交叉をある種の Weyl 群の軌道として記述した。

我々はコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形に関する Floer ホモロジーの [4] の結果を複素旗多様体に拡張することを目標に研究を進めている。これまでの学会発表で、複素部分空間の系列の成す複素旗多様体内の実部分空間の系列の成す実形と四元数部分空間の系列の成す実形の場合に、二つの実形の交叉が離散的であれば対蹠集合になることを示した。本講演では一般の複素旗多様体内の二つの実旗多様体の交叉が離散的になるための必要十分条件を与え、離散的なときに交叉は対蹠的であり、またある種の Weyl 群の軌道として記述できることを報告する。

以降, G を連結コンパクト半単純 Lie 群とし、G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 $Z(\neq 0)$ を固定して考える。G の随伴表現による Z の軌道

$$M = \mathrm{Ad}(G)Z \subset \mathfrak{g}$$

は**複素旗多様体**と呼ばれる。M には $\mathfrak{g}$ の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積から誘導される Riemann 計量が入っているものとする。また $G^{\mathbb{C}}$ を G の複素化、$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ をその Lie 環とし、$G^{\mathbb{C}}$ の放物型複素 Lie 部分群 $P^{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の放物型部分 Lie 環 $\bigoplus_{k\geq 0}\{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [\sqrt{-1}Z, X] = kX\}$ に対応するものとする. このとき $G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ への G の作用は推移的で、なおかつ Z のイソトロピー部分群 G_Z が $G \cap P^{\mathbb{C}}$ と一致する。特に $M \cong G/G_Z \cong G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ には $G^{\mathbb{C}}$ 不変な複素構造が定まり、これにより M は G 等質な Kähler 多様体になる。また $M \cong G/G_Z$ には一般化された対称空間の構造が入ることが知られており、それにより対蹠集合の概念が定義される。

(G, K) をコンパクト型対称対とし、これによる G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の標準分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

と表す。$M = \mathrm{Ad}(G)Z$ と $\mathfrak{p}$ が交わるとき、M の部分多様体 $L = M \cap \mathfrak{p}$ を **実旗多様体**と呼ぶ。このとき L には $\mathrm{Ad}(K)$ が推移的に作用することが知られている。一方で

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

とおくと、$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実形になる。$\mathfrak{g}'$ を Lie 環とする $G^{\mathbb{C}}$ の解析的部分群を G' とすると、(G', K) は非コンパクト型 Riemann 対称対になる。先に述べた同型

$M \cong G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ において、M の部分多様体 L は $G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ の部分多様体 $G'/(G' \cap P^{\mathbb{C}})$ と対応する。特に G' に関する $G^{\mathbb{C}}$ の複素共役を σ と表すと、$P^{\mathbb{C}}$ は σ で不変であり、したがって σ は $M \cong G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ に対合的反正則等長変換 $\tilde{\sigma}$ を誘導する。σ による $G^{\mathbb{C}}$ の不動点集合の単位連結成分が G' であることから、$\tilde{\sigma}$ による M の不動点集合の原点を含む連結成分は L と一致する。よって L は M の実形となる。

以下、複素旗多様体 $M = \mathrm{Ad}(G)Z$ 内の二つの実旗多様体の交叉について考える。(G, K_1, K_2) をコンパクト対称三対とする。K_i を定める G の対合を θ_i と表す。本講演では $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ の場合を扱う。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ を二通りに標準分解し、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 + \mathfrak{p}_2$$

と表す。$M = \mathrm{Ad}(G)Z$ が $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ とそれぞれ交わるとし、二つの実旗多様体 $L_1 = M \cap \mathfrak{p}_1$ と $L_2 = M \cap \mathfrak{p}_2$ を考える。$a \in G$ に対して交叉 $L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2$ を考察しよう。$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ 内の極大可換部分空間とし、G 内のトーラス A を $A = \exp \mathfrak{a}$ と定めると、[1] より $G = K_1AK_2$ が成り立つので、$a = \exp H$ $(H \in \mathfrak{a})$ として一般性を失わない。(G, K_1, K_2) の定める対称三対を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ と表す (定義については [2] を参照)。$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}_i$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}_i$ をとり、コンパクト型 Riemann 対称対 (G, K_i) の $\mathfrak{a}_i$ に関する制限ルート系を R_i と表す。$\tilde{\Sigma}$ と R_i の Weyl 群をそれぞれ $W(\tilde{\Sigma})$ と $W(R_i)$ で表す。本講演の主結果は以下のものである：

定理 1. 二つの実旗多様体の交叉 $L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2$ $(a = \exp H, H \in \mathfrak{a})$ が離散的になるための必要十分条件は H が $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の定める正則元になることである。また, 二つの実旗多様体の交叉 $L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2$ が離散的のとき、これは $M = \mathrm{Ad}(G)Z$ の対蹠集合となる。更に $M \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$ であり、任意の $Z' \in M \cap \mathfrak{a}$ に対して、

$$L_1 \cap \mathrm{Ad}(a)L_2 = M \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})Z' = W(R_1)Z' \cap \mathfrak{a} = W(R_2)Z' \cap \mathfrak{a}$$

と表示できる。

参考文献

[1] E. Heintze, R. S. Palais, C. Terng and G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions on symmetric spaces*, Geometry, topology & physics, Conf. Proc. Lecture Note Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp. 214–245.

[2] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** no. 1 (2011), 79–136.

[3] O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads*, preprint.

[4] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135–1151.

[5] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan, **64** no.4 (2012), 1297–1332.

[6] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[7] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.