コンパクトLie群の極大対蹠部分群 修正版

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)*1
田崎 博之 (筑波大学数理物質系)*2

M をコンパクトRiemann対称空間とし、$x \in M$ における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S のすべての点 x, y に対して $s_x(y) = y$ が成り立つとき、S を**対蹠集合**という。M の対蹠集合の元の個数の最大値を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらはChen-Nagano[1] が導入した概念である。

対称 R 空間内の大対蹠集合同士は等長変換全体の単位連結成分の元の作用で写り合うことと、任意の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれることおよび大対蹠集合がWeyl群の軌道になることを我々[2] は示した。これより、対称 R 空間内の対蹠集合の形は把握できている。これに対して対称 R 空間ではないコンパクトRiemann対称空間の対蹠集合はよくわかっているとは言えない。たとえば有向実Grassmann多様体は、階数が3以上のとき、対称 R 空間ではないコンパクトRiemann対称空間であり、対蹠集合について [3] である程度解明したが、全貌はまだよくわかっていない。

コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、これに関してコンパクトRiemann対称空間になる。よって、コンパクトLie群の対蹠集合について考えることができる。コンパクトLie群の極大対蹠集合が単位元を含むとき、$\mathbb{Z}_2$ のいくつかの積に同型な部分群になることがわかる。この講演では、特に $U(n)$ と $SU(n)$ の商群の極大対蹠部分群に関して得られた結果を報告する。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \quad \Delta_n^{\pm} = \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

とすると、Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $U(n)$ と $SU(n)$ の共役を除いて一意的な大対蹠部分群である。これに対してこれらの商群の極大対蹠部分群を記述するにはさらに記号を準備する必要がある。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2). \quad D^{\pm}[4] = \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}$$

によって二面体群 $D[4]$ とその部分集合 $D^{\pm}[4]$ を定める。自然数 n を2の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して $D[4]$ の s 個のテンソル積と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$C(s, n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

によって定める。

定理 1 μ を自然数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を1の原始 2μ 乗根とする。$U(n)$ から $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ への自然な射影を π_n で表す。このとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

*1 e-mail: tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp
*2 e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n).$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \quad (0 \le s \le k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

注意 (2) の $(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合は、包含関係 $\Delta_2 \subsetneq D[4]$ より、$C(k-1,2^k) \subsetneq C(k,2^k)$ が成り立ち、$C(k-1,2^k)$ は極大ではない。

定理 2 μ を n の約数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $SU(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。このとき、$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

(a) $k = 1$ のとき、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l).$$

ただし、$n = \mu = 2$ のときは $\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$ を除く。

(b) $k \ge 2$ のとき、$\mu = 2^{k'} \cdot l'$, $1 \le k' \le k$ であり、l' は l の約数とする。

(b1) $k' = k$ ならば、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n(C(s,n)) \quad (1 \le s \le k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合を除く。

(b2) $1 \le k' < k$ ならば、

$$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+), \quad \pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \quad (1 \le s \le k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合を除き、$n = 4$ の場合はさらに $\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$ を除く。

なお、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠集合の元の個数の最大値は Chen-Nagano[1] が求めている。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

[3] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, Internat. J. Math. 24 no.8 (2013), 1350061-1-28.