コンパクトLie群の極大対蹠部分群

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)
田崎 博之 (筑波大学数理物質系)

日本数学会2015年度秋季総合分科会

2015年9月13日 京都産業大学

M：コンパクト**Riemann**対称空間

s_x：$x \in M$における点対称

$S \subset M$：対蹠集合 **(antipodal set)**

$^\forall x, {}^\forall y \in S$に対して$s_x(y) = y$が成立

対蹠集合Sが大対蹠集合 **(great antipodal set)**

$|S| = \mathbf{max}\{|A| \mid A \subset M$ 対蹠集合$\}$

$M = S^n \qquad \{x, -x\}$ 大対蹠集合

$M = \mathbb{R}P^n \qquad \{\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_{n+1}\}$ 大対蹠集合

大対蹠集合は極大対蹠集合

逆は対称R空間では成立するが一般には成立しない

<u>定理</u> **(田中-田崎 2013)**

対称R空間において

・大対蹠集合同士は等長変換全体の単位連結成分の元の作用で写り合う

・任意の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる

・大対蹠集合は**Weyl**群の軌道になる

対称R空間ではないコンパクト**Riemann**対称空間の対蹠集合についてはあまり知られていない

(田崎 2013)

階数の低い有向実**Grassmann**多様体の極大対蹠集合の分類 **(**階数≥ 3ならば対称R空間ではない**)**

コンパクトLie群の商群は一般には対称R空間ではない

コンパクトLie群G　　両側不変Riemann計量

$\Rightarrow$ コンパクトRiemann対称空間

$x \in G$における点対称　$s_x(y) = xy^{-1}x \quad (y \in G)$

1 : Gの単位元

$s_1(y) = y \Leftrightarrow y^2 = 1$

$x^2 = 1, y^2 = 1$のとき $s_x(y) = y \Leftrightarrow xy = yx$

$1 \in S \subset G$: 極大対蹠集合 $\Rightarrow$ 部分群

$S \cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ (r個の積)　　$|S| = 2^r$

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

$$\Delta_n^{\pm} := \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

Δ_nは$U(n)$の共役を除いて一意的な大対蹠部分群

Δ_n^{+}は$SU(n)$の共役を除いて一意的な大対蹠部分群

$U(n)$は対称R空間

$SU(n)$は$n \geq 3$のとき対称R空間ではない

$$D[4] := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2)$$

$$D^{\pm}[4] := \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}$$

$D[4]$: 二面体群　　正四角形を不変にする

n : 自然数　　$n = 2^k \cdot l$, l : 奇数

$0 \leq s \leq k$ に対して

$$C(s,n) := D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

行列のテンソル積

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} xa & xb & ya & yb \\ xc & xd & yc & yd \\ \hline za & zb & wa & wb \\ zc & zd & wc & wd \end{array}\right]$$

<u>定理 **1**</u>　μ：自然数

$\mathbb{Z}_\mu$：$U(n)$の中心内のμ次巡回群

θ：1の原始2μ乗根

$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$：自然な射影

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) nまたはμが奇数の場合

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$$

(2) nかつμが偶数の場合

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \quad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合を除く

<u>注意</u>　$\Delta_2 \subsetneq D[4]$より

$$\begin{aligned} C(k-1, 2^k) &= D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_2 \\ &\subsetneq D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes D[4] = C(k, 2^k) \end{aligned}$$

$C(k-1, 2^k)$は極大ではない

<u>定理 2</u>　μ : nの約数

$\mathbb{Z}_\mu$: $SU(n)$の中心内のμ次巡回群

θ : 1の原始2μ乗根

$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) nまたはμが奇数の場合

$$\pi_n(\Delta_n^+)$$

(2) nかつμが偶数の場合

(a) $k = 1$のとき

$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)$,　$\pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l)$

ただし、$n = \mu = 2$のときは$\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$を除く

(b) $k \geq 2$のとき　　$\mu = 2^{k'} \cdot l'$

(b1) $k' = k$ならば

$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)$, $\quad \pi_n(C(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k)$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合を除く

(b2) $1 \leq k' < k$ならば

$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+)$, $\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n))$ $(1 \leq s \leq k)$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$の場合を除き、$n = 4$の場合はさらに$\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$を除く

注意　$\Delta_4^+ = \Delta_2 \otimes \Delta_2 \subsetneq D[4] \otimes D[4] = C(2,4)$

$\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$は極大ではない

最近、$O(n)/\{\pm 1_n\}$, $SO(n)/\{\pm 1_n\}$, $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$

の極大対蹠部分群の分類結果も得られた