コンパクトLie群の極大対蹠部分群II

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)*1
田崎 博之 (筑波大学数理物質系)*2

2015年秋の学会の「コンパクトLie群の極大対蹠部分群」という題名の講演で、我々は$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$と$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$の極大対蹠部分群の分類結果を発表した。今回の講演はその続きであり、$O(n)/\{\pm 1_n\}, SO(n)/\{\pm 1_n\}, Sp(n)/\{\pm 1_n\}$および例外型コンパクトLie群$G_2$の極大対蹠部分群の分類結果について発表する。

前回と今回の発表結果に現れる商群は、対応するLie環の内部自己同型群になる場合を含んでいる。その場合の極大対蹠部分群は、Lie環の互いに可換な対合的内部自己同型の極大集合に単位元を加えたものにほかならない。この意味では、Lie環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類を求めたいところであるが、これについてはまだ完全な解決には至っていない。

MをコンパクトRiemann対称空間とし、$x \in M$における点対称をs_xで表す。Mの部分集合Sのすべての点x, yに対して$s_x(y) = y$が成り立つとき、Sを**対蹠集合**という。Mの対蹠集合の元の個数の最大値を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらはChen-Nagano[1] が導入した概念である。

コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、これに関してコンパクトRiemann対称空間になる。よって、コンパクトLie群の対蹠集合について考えることができる。コンパクトLie群の極大対蹠集合が単位元を含むとき、$\mathbb{Z}_2$のいくつかの積に同型な部分群になることがわかる。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \quad \Delta_n^{\pm} = \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

とすると、Δ_nとΔ_n^+はそれぞれ$O(n), U(n), Sp(n)$と$SO(n), SU(n)$の共役を除いて一意的な大対蹠部分群である。さらに記号を準備する。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2). \quad D^{\pm}[4] = \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}$$

によって二面体群$D[4]$とその部分集合$D^{\pm}[4]$を定める。また、四元数の標準的な基底の± 1倍の全体を

$$Q[8] = \{ \pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k} \}$$

とおく。これらは$D[4]/\{\pm 1_2\} \cong Q[8]/\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$を満たすが、$D[4]$と$Q[8]$は同型ではない。

自然数nを2の冪2^kと奇数lの積$2^k \cdot l$に分解し、$0 \le s \le k$に対して$D[4]$のs個のテンソル積と$\Delta_{n/2^s}$のテンソル積を

$$C(s, n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

*1 e-mail: tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp
*2 e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

によって定める。

定理 1 ([2])　自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解する。

(I) $O(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\pi_n(C(s,n)) \quad (0 \le s \le k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(II) n が偶数のとき、$SO(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) $k=1$ の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+), \quad \pi_n(D^+[4] \otimes \Delta_l).$$

ただし、$n=2$ の場合は $\pi_2(\Delta_2^+)$ を除く。

(2) $k \ge 2$ の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+), \quad \pi_n(C(s,n)) \quad (1 \le s \le k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除き、$n=4$ の場合はさらに $\pi_4(\Delta_4^+)$ を除く。

(III) $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\pi_n(Q[8] \cdot C(s,n)) \quad (0 \le s \le k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

G_2 の単位元 e における点対称 $s_e(x) = x^{-1}$ による不動点集合は位数 2 の元の共役類であり、e を除いた共役類は唯一でそれを M_1^+ と表す。M_1^+ はコンパクト対称空間 $G_2/SO(4)$ と同型である。M_1^+ の任意の点 o を固定する。M_1^+ における s_o の不動点集合は、o と可換な M_1^+ の元全体からなり、孤立不動点 o を除いた連結成分は唯一でそれを $M_{1,1}^+$ と表す。$M_{1,1}^+$ はコンパクト対称空間 $(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ と同型である。ここで、$\mathbb{Z}_2$ の $S^2 \times S^2$ への作用は $(p,q) \mapsto (-p,-q)$ で与えられている。自然な射影 $S^2 \times S^2 \to (S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ による (p,q) の像を $[p,q]$ で表す。$S^2 \times S^2$ の各 S^2 の直交系を u_1, u_2, u_3 および v_1, v_2, v_3 とするとき、$A := \{[u_1, \pm v_1], [u_2, \pm v_2], [u_3, \pm v_3]\}$ は $(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ の極大対蹠集合であり、すべての極大対蹠集合は A に合同である。A に対応する $M_{1,1}^+$ の極大対蹠集合を $A_{1,1}$ とする。これらの記号のもとで次が成り立つ。

定理 2 ([2])　G_2 の極大対蹠部分群は

$$\{e, o\} \cup A_{1,1}$$

に共役であり、その位数は 8 である。

対蹠集合の元の個数の最大値は Chen-Nagano[1] が求めている。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of compact Lie groups, in preparation.