例外型コンパクトLie群G_2の極大対蹠部分群

田中 真紀子　(東京理科大学理工学部)*1
田崎 博之　(筑波大学数理物質系)*2
保倉 理美　(福井大学学術研究院工学系部門)*3

コンパクトRiemann対称空間Mを一つ固定してその部分集合Bを考える。任意の元$x, y \in B$について$s_x(y) = y$となるとき、BをMの対蹠集合という。ここで、s_xは、xにおけるMの点対称を表す。さらに、Mの対蹠集合の内、包含関係で極大なものをMの**極大対蹠集合**と呼ぶ。また、MがコンパクトLie群上に両側不変計量を導入したもののとき、Mの単位元eを含むMの極大対蹠集合を、Mの**極大対蹠部分群**と呼ぶ。これは、Mの位数2以下の元からなる可換部分群の内、極大であるものと同じである。

本講演では、Chen-Nagano [1] が導入したコンパクト Riemann 対称空間における polarsの概念を用い、連結な例外型コンパクトLie群G_2 の極大対蹠部分群は、共役を除いて唯一つであることを示す。ここで、G_2は定数倍を除いて定まる両側不変Riemann計量によって、連結なコンパクトRiemann対称空間と考えている。G_2型拡大Dynkin図形についての考察より、G_2の普遍被覆群の中心は単位元のみ[2] であるから、G_2は単連結である。

G_2の単位元eにおける点対称の不動点集合$F(s_e, G_2)$の$\{e\}$以外の連結成分は唯一つであり、それをM_1^+とおくと、

$$F(s_e, G_2) = \{e\} \cup M_1^+, \quad M_1^+ \cong G_2/SO(4)$$

と書ける。また、任意の点$o \in M_1^+$に対して、oにおけるM_1^+ の点対称の不動点集合$F(s_o, M_1^+)$の$\{o\}$以外の連結成分も唯一つであり、それを$M_{1,1}^+$とおくと、

$$F(s_o, M_1^+) = \{o\} \cup M_{1,1}^+, \quad M_{1,1}^+ \cong (S^2 \times S^2)/\boldsymbol{Z}_2$$

が成り立つ。さらに、$(S^2 \times S^2)/\boldsymbol{Z}_2$の極大対蹠集合は、$\{[e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$に合同である。ここで、$e_1, e_2, e_3 \in S^2$は第一因子の$S^2$の互いに直交する元であり、$f_1, f_2, f_3 \in S^2$は第二因子の$S^2$の互いに直交する元である。以上より、次の定理を得る。

定理 1 ([6])M_1^+の極大対蹠集合は$\{o, [e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$ に合同になる。さらにG_2の極大対蹠部分群は

$$\{e, o, [e_1, \pm f_1], [e_2, \pm f_2], [e_3, \pm f_3]\}$$

に共役になる。

次に、G_2 の八元数$\boldsymbol{O}$の自己同型群としての実現 [3, 5] と、古典群$SO(4)$のG_2の部分群としての実現 [4] を用いることで、G_2の極大対蹠部分群を具体的に表示する。

*1 e-mail: `tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp`
*2 e-mail: `tasaki@math.tsukuba.ac.jp`
*3 e-mail: `yasukura@u-fukui.ac.jp`

Hamilton 3対 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ によって、四元数 $\boldsymbol{R}$ 代数を

$$\boldsymbol{H} := \{b = \sum_{\boldsymbol{h}=1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{h} | b_{\boldsymbol{h}} \in \boldsymbol{R}\}$$

と表し、任意の $b = \sum_{\boldsymbol{h}=1,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}$ に対し、$\overline{b} := b_1 - \sum_{\boldsymbol{h}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{H}$, $|b| := \sqrt{b\overline{b}} \in \boldsymbol{R}$ とおく。さらに、$\mathrm{Im}\boldsymbol{H} := \{b \in \boldsymbol{H} \mid \overline{b} = -b\}$ とおく。Cayley-Dickson process により $\boldsymbol{O} := \boldsymbol{H}^2 = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}$ とおき、次式で $\boldsymbol{O}$ の任意の2元の積を定める。

$$(m,a)(n,b) = (mn - \overline{b}a,\ a\overline{n} + bm) \qquad ((m,a),(n,b) \in \boldsymbol{O})$$

このとき、

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O}) := \{\alpha \in GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{O}) \mid \alpha(xy) = (\alpha x)(\alpha y); x, y \in \boldsymbol{O}\}$$

とおくと、$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})$ は連結 [3] であり、Lie 群同型 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O}) \cong G_2$ の存在もわかる [5]。

$Sp(1) := \{q \in \boldsymbol{H} \mid |q| = 1\}$ とおく。写像 $\psi : Sp(1)^2 \longrightarrow GL_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{O}); (p,q) \mapsto \psi(p,q)$ を

$$\psi(p,q)(m,a) := (qm\overline{q}, pa\overline{q}) \qquad ((m,a) \in \boldsymbol{O})$$

と定めると、ψ は $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})$ の中への Lie 群準同型であり、$\gamma := \psi(1,-1)$ とおくと、

$$\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O}) \supset \{g \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{O}) \mid g\gamma g^{-1} = \gamma\} = \psi(Sp(1)^2) \cong SO(4)$$

である [4, Theorem 1.3.4]。このとき、$F(s_e, \mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})) = \{e\} \cup M_1^+$;

$$M_1^+ = \{g\gamma g^{-1} \mid g \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})\} \cong \mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})/\psi(Sp(1)^2) \cong G_2/SO(4)$$

であることが確認できる。また、$o = \gamma \in M_1^+$ について、$F(s_\gamma, M_1^+) = \{\gamma\} \cup M_{1,1}^+$;

$$M_{1,1}^+ = \{\psi(p,q) \in \psi(Sp(1)^2) \mid p^2 = q^2 = -1\} \cong (S^2 \times S^2)/\boldsymbol{Z}_2;$$
$$S^2 := Sp(1) \cap \mathrm{Im}\boldsymbol{H} \subset \mathrm{Im}\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{Z}_2 := \{\pm(1,1)\} \subset \boldsymbol{O}$$

であることも確認できる。さらに、$M_{1,1}^+$ の極大対蹠集合は $\{\psi(\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{i}), \psi(\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{j}), \psi(\boldsymbol{k}, \pm\boldsymbol{k})\}$ に合同になることもわかる。これらより、次の定理を得る。

定理 2 ([6]) M_1^+ の極大対蹠集合は $\{\psi(1,-1), \psi(\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{i}), \psi(\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{j}), \psi(\boldsymbol{k}, \pm\boldsymbol{k})\}$ に合同になる。さらに $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{O})$ の極大対蹠部分群は

$$\{\psi(1,\pm 1), \psi(\boldsymbol{i}, \pm\boldsymbol{i}), \psi(\boldsymbol{j}, \pm\boldsymbol{j}), \psi(\boldsymbol{k}, \pm\boldsymbol{k})\}$$

に共役になる。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), 273–297.

[2] M. Goto and F.D. Grosshans, *Semisimple Lie algebras*, Marcel Dekker Inc., 1978.

[3] 横田一郎, 群と表現, 裳華房, 1973.

[4] I. Yokota, Realization of involutive automorphisms σ and G^σ of exceptional linear Lie groups G, Part I, $G = G_2, F_4$ and E_6, *Tsukuba J. Math.* **14**-1(1990), 185–223.

[5] I. Yokota, Exceptional Lie groups, arXiv:0902.0431v1[math.DG]3 Feb 2009, *e-print*.

[6] M. S. Tanaka, H. Tasaki and O. Yasukura, Maximal antipodal subgroups of the compact Lie group G_2 of exceptional type, *in preparation.*