

古典型コンパクト Lie 環の自己同型群 の極大対蹠部分群

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)*1

田崎 博之 (筑波大学数理物質系)*2

2015 年秋、2016 年春の学会の「コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群」、「— II」という題名の講演で、我々は古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の分類結果を発表した。今回の講演はその分類結果と非連結コンパクト Lie 群における元の標準形を使って得られた古典型コンパクト Lie 環の自己同型群の極大対蹠部分群の分類結果について発表する。これは古典型コンパクト Lie 環の互いに可換な対合的自己同型の極大集合を分類したことにもなっている。

対蹠集合に関連した事項を復習しておく。 M をコンパクト Riemann 対称空間とし、 $x \in M$ における点対称を s_x で表す。 M の部分集合 S のすべての点 x, y に対して $s_x(y) = y$ が成り立つとき、 S を対蹠集合という。 M の対蹠集合の元の個数の最大値を与える対蹠集合を大対蹠集合と呼ぶ。これらは Chen-Nagano[1] が導入した概念である。ここでは大対蹠集合だけではなく、包含関係に関して極大な対蹠集合も考察の対象にする。大対蹠集合はもちろん極大対蹠集合になるが、一般にはその逆は成り立たない。

コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、これに関してコンパクト Riemann 対称空間になる。よって、コンパクト Lie 群の対蹠集合について考えることができる。コンパクト Lie 群の極大対蹠集合が単位元を含むとき、部分群になることがわかる。したがって、コンパクト Lie 群では極大対蹠部分群だけを考えれば十分である。さらに極大対蹠部分群は \mathbb{Z}_2 のいくつかの積に同型になることもわかり、位数が 2 以下の元からなる極大可換部分群と同じことになる。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

とすると、 Δ_n は $O(n), U(n), Sp(n)$ の共役を除いて一意的な大対蹠部分群である。さらに記号を準備する。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2)$$

によって二面体群 $D[4]$ を定める。また、四元数の標準的な基底の ± 1 倍の全体を

$$Q[8] = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

とおく。自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、 $0 \leq s \leq k$ に対して $D[4]$ の s 個のテンソル積と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$D(s, n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

*1 e-mail: tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp

*2 e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

によって定める。次の定理において Lie 環の自己同型群の単位元を e で表す。

定理 1 ([3]) 自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解する。

- (I) $\text{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ の単位元を e で表し、 $\tau : \mathfrak{su}(n) \rightarrow \mathfrak{su}(n) ; X \mapsto \bar{X}$ によって τ を定める。 $\text{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\{e, \tau\} \text{Ad}(D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、 $(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合を除く。

- (II) $\text{Aut}(\mathfrak{o}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\text{Ad}(D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、 $(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合を除く。

- (III) $\text{Aut}(\mathfrak{sp}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\text{Ad}(Q[8] \cdot D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、 $(s, n) = (k - 1, 2^k)$ の場合を除く。

これまでの二回の発表結果に現れる商群は、対応する Lie 環の内部自己同型群になる場合を含んでいる。コンパクト半単純 Lie 群 G の中心を Z で表し、 G の Lie 環を \mathfrak{g} で表すと、 $G/Z \cong \text{Ad}(G) = \text{Int}(\mathfrak{g})$ が成り立つからである。 $\text{Int}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}(\mathfrak{g})$ が成り立つ場合もあるが、一般にはこれらは等しくないので、これまでの極大対蹠部分群の分類結果から古典型コンパクト Lie 環 \mathfrak{g} の自己同型群 $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ の極大対蹠部分群の分類が得られるとは限らない。定理 1 の (II) と (III) の結果は古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の分類から得られる。 $\text{Aut}(\mathfrak{o}(8))$ には特異な元が存在するが、位数が 3 であるため極大対蹠部分群には含まれない。

結局、これまでの商群の極大対蹠部分群の分類結果からすぐには明らかにならない場合は、 $\text{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ の場合だけである。この場合は

$$\text{Aut}(\mathfrak{su}(n)) = \text{Ad}(U(n)) \cup \tau \text{Ad}(U(n))$$

が成り立つ。連結コンパクト Lie 群の元の標準形は極大トーラスからとることができる。非連結コンパクト Lie 群の場合は、Hermann 作用を利用してある種の極大トーラスから標準形をとることができ、その標準形の形と [2] で得た分類結果から、定理 1 の (I) の分類結果を得る。

参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, *Trans. Amer. Math. Soc.* **308** (1988), 273–297.
- [2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of compact Lie groups, in preparation.
- [3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of the automorphism groups of compact Lie algebras, in preparation.