古典型コンパクトLie環の自己同型群の極大対蹠部分群

田崎博之

筑波大学数理物質系

日本数学会

2016年9月17日

1. 対蹠集合

M : Riemann対称空間

s_x : xに関する点対称 $x \in M$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$|S|$: 集合Sの元の個数

$\#_2 M$: Mの2-number

$= \sup\{|S| \mid S$は対蹠集合$\}$

S : 大対蹠集合$\Leftrightarrow \#_2 M = |S|$

2. 古典型コンパクト Lie 群の商群

コンパクト Lie 群：両側不変 Riemann 計量

$\Rightarrow$ コンパクト Riemann 対称空間

単位元を含む極大対蹠集合 $\Rightarrow$ 可換部分群

$\cong \mathbb{Z}_{\mathbf{2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\mathbf{2}}$

$$\boldsymbol{\Delta}_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \boldsymbol{O}(\boldsymbol{n}),$$

$$\boldsymbol{\Delta}_n^+ = \{\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{\Delta}_n \mid \det \boldsymbol{g} = 1\}$$

Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $U(n)$, $O(n)$, $Sp(n)$ と $SU(n)$, $SO(n)$ の共役を除いて一意的な極大対蹠部分群

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2)$$

$Q[8] = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

自然数 n を $n = 2^k \cdot l$ (l : 奇数) と分解し、

$0 \leq s \leq k$ に対して

$$D(s,n)$$
$$= D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s}$$
$$= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_i \in D[4], d_0 \in \Delta_{n/2^s}\}$$

定理 (田中-T.)

(I) $\tau : \mathfrak{su}(n) \to \mathfrak{su}(n); X \mapsto \bar{X}$

$\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))$ **の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役**

$$\{e, \tau\}\mathrm{Ad}(D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ **の場合を除く。**

(II) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{o}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\mathrm{Ad}(D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$ の場合を除く。

(III) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sp}(n))$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\mathrm{Ad}(Q[8]\cdot D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$ の場合を除く。