

# 有向実 Grassmann 多様体の極大対蹠集合の系列

田崎 博之 (筑波大学数理物質系)\*

2013 年秋と 2014 年秋の学会の講演で、 $\mathbb{R}^n$  内の向きの付いた  $k$  次元部分空間全体の成す有向実 Grassmann 多様体  $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$  の極大対蹠集合が、 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  のある条件を満たす部分集合の族と対応すること、 $k \leq 4$  の場合の極大対蹠集合の分類、この分類に現れた系列の一般化、それらを利用した対蹠集合の元の個数の評価などについて発表した。これらの結果は論文 [3]、[4]、[5] で発表した。今回は、これまでに得られた極大対蹠集合の系列をさらに一般化した系列に関する結果を発表する。この結果は [6] の内容に基づいている。Riemann 対称空間内の対蹠集合の概念は Chen-Nagano [1] が導入した概念である。

集合  $X$  の  $k$  個の元からなる部分集合の全体を  $\binom{X}{k}$  で表す。

定義 1  $\binom{X}{k}$  の元  $\alpha, \beta$  に対して差集合  $\alpha - \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\}$  の元の個数  $|\alpha - \beta|$  が偶数になるとき、 $\alpha, \beta$  は対蹠的であるという。部分集合  $A \subset \binom{X}{k}$  の任意の二元が対蹠的であるとき、 $A$  を対蹠集合という。 $\binom{X}{k}$  の二つの部分集合が  $X$  の置換によって写り合うとき、それら二つの部分集合を合同という。

これまでの学会講演では、 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$  の極大対蹠集合の合同類全体と  $\binom{[n]}{k}$  の極大対蹠集合 (MAS) の合同類全体が対応することを示し、 $\binom{[n]}{k}$  ( $k \leq 4$ ) の極大対蹠集合の合同類を分類した。さらに、その分類に現れる系列を一般化して次の対蹠集合の系列を得た。

$$A(2k, 2l) = \{\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_k \mid \alpha_i \in \{\{1, 2\}, \dots, \{2l-1, 2l\}\}, \alpha_i \neq \alpha_j (i \neq j)\} \subset \binom{[2l]}{2k}$$

$$A(2k+1, 2l+1) = \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k, 2l)\} \subset \binom{[2l+1]}{2k+1}$$

$$Ev_{2m} = \{\{\alpha(1), \dots, \alpha(m)\} \mid \alpha(i) \in \{2i-1, 2i\} (1 \leq i \leq m), \text{偶数の } \alpha(i) \text{ は偶数個}\} \\ \subset \binom{[2m]}{m}$$

これらが極大対蹠集合であるかどうかについては、以下の結果を得ている。

定理 2([4])  $l \geq 3k+1$  のとき、

- (1)  $A(2k, 2l)$  は  $\binom{[2l]}{2k}$ ,  $\binom{[2l+1]}{2k}$  の MAS である。
- (2)  $A(2k+1, 2l+1)$  は  $\binom{[2l+1]}{2k+1}$ ,  $\binom{[2l+2]}{2k+1}$  の MAS である。

定理 3([4]) (1)  $2m \equiv 2, 4, 6 \pmod{8}$  のとき、 $Ev_{2m}$  は  $\binom{[2m]}{m}$  の MAS である。

(2)  $Ev_{8m}$  は  $\binom{[8m]}{4m}$  の MAS ではなく、 $Ev_{8m} \cup A(4m, 8m)$  は  $\binom{[8m]}{4m}$  の MAS である。

$k \geq 5$  のときの  $\binom{[n]}{k}$  の MAS の全貌はわかっていないが、 $k$  に対して  $n$  が十分大きいときの対蹠集合の元の個数の最大値を与える MAS は  $A(2k, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$  または  $A(2k+1, 2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1)$

\* e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

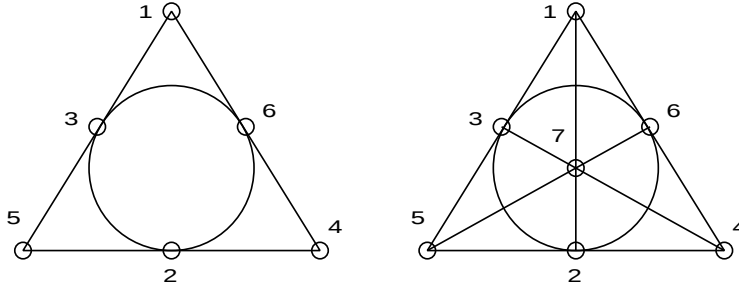
であることが、[3]と[5]の結果を経て、一般の場合に[2]で明らかになった。そこで、 $k$ に対して  $n$  があまり大きくないときの  $\binom{[n]}{k}$  の MAS に興味を持たれる。定理 3 の MAS はそのような例である。これを一般化して次の対蹠集合の系列を得た。

$$\begin{aligned} Ev_{8m}^+ &= Ev_{8m} \cup A(4m, 8m), \\ Ev_{8m+2}^+ &= Ev_{8m+2} \cup A(4m-2, 8m+2) \times \{\{8m+3, 8m+4, 8m+5\}\}, \\ Ev_{8m+4}^+ &= Ev_{8m+4} \cup A(4m, 8m+4) \times \{\{8m+5, 8m+6\}\}, \\ Ev_{8m+6}^+ &= Ev_{8m+6} \cup A(4m+2, 8m+6) \times \{\{8m+7\}\}. \end{aligned}$$

定理 4 以下は  $\binom{[n]}{k}$  の MAS である。

| $k \backslash n$ | $8m$        | $8m+1$      | $8m+2$      | $8m+3$      | $8m+4$      | $8m+5$        | $8m+6$        | $8m+7$        |
|------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|---------------|---------------|---------------|
| $4m$             | $Ev_{8m}^+$ | $Ev_{8m}^+$ | $Ev_{8m}^+$ | $Ev_{8m}^+$ |             |               |               |               |
| $4m+1$           |             |             | $Ev_{8m+2}$ | $Ev_{8m+2}$ | $Ev_{8m+2}$ | $Ev_{8m+2}^+$ |               |               |
| $4m+2$           |             |             |             |             | $Ev_{8m+4}$ | $Ev_{8m+4}$   | $Ev_{8m+4}^+$ |               |
| $4m+3$           |             |             |             |             |             |               | $Ev_{8m+6}$   | $Ev_{8m+6}^+$ |

例 5  $Ev_6$  と  $Ev_6^+$  はそれぞれ  $\binom{[6]}{3}$  と  $\binom{[7]}{3}$  の MAS の分類に現れたものであり、次のように表示できる。定理 4 の MAS はこれらの一般化になっている。



## 参考文献

- [1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.
- [2] P. Frankl and N. Tokushige, Uniform eventown problems, European J. Combinatorics **51**, (2016), 280–286.
- [3] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, Internat. J. Math. **24** no.8, (2013), Article ID: 1350061, 28 pp.
- [4] H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds, in ICM Satellite Conf. on “Real and Complex Submanifolds”, eds. Y. J. Suh *et al.*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, **106**, (2014), 515–524.
- [5] H. Tasaki, Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, ”Global Analysis and Differential Geometry on Manifolds,” (special issue: the Kobayashi memorial volume), Internat. J. Math. **26** no.5, (2015), Article ID: 1541008, 12 pp.
- [6] H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds II, to appear in Springer Proceedings in Mathematics and Statistics