有向実Grassmann多様体の極大対蹠集合の系列

田崎博之

筑波大学数理物質系

2017年3月26日

定義 (Chen-長野)

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$x, y \in M$: 対蹠的 $\Leftrightarrow s_x(y) = y$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \; x, y$: 対蹠的

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow |S|$: 最大値

$\boldsymbol{X}$：集合

$\binom{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{k}} = \{\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{X} \mid |\boldsymbol{\alpha}| = \boldsymbol{k}\}$

$[\boldsymbol{n}] = \{1, \ldots, \boldsymbol{n}\}$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ に対して

$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} = \{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{\beta}\}$

$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$：対蹠的 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$：偶数

$\boldsymbol{A} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$：対蹠的

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$：対蹠的 $(\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{A})$

有向実 Grassmann 多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$

：$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元有向部分空間全体

$SO(n)$ 不変 Riemann 計量により

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$：Riemann 対称空間

定理 1(T.2013)

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合の分類

$\leftrightarrow \binom{[n]}{k}$ の極大対蹠的部分集合の分類

(正規直交基底の元の選び方)

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$: $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$\boldsymbol{A}$: $\binom{[n]}{k}$ の極大対蹠的部分集合

$\Rightarrow \{\pm\langle \boldsymbol{e}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\alpha(k)}\rangle_{\mathbb{R}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}\}$

: $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合

逆の対応も定まる

$\binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$ $(\boldsymbol{k} \leq 4)$ の $\mathbf{MAS}$ の分類： 完成

この分類に現れる $\mathbf{MAS}$

$\downarrow$ 一般化

$\boldsymbol{k} > 4$ のときの $\binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$ の $\mathbf{MAS}$

：分類または性質を調べる

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A(2,2l)} = \{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2l-1,2l\}\} \\
&\qquad \subset \binom{[2l]}{2} \\
&\boldsymbol{A(2k,2l)} \\
&= \{\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \mid \alpha_i \in A(2,2l), \alpha_i \neq \alpha_j\} \\
&\qquad \subset \binom{[2l]}{2k} \\
&\boldsymbol{A(2k+1,2l+1)} \\
&= \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k,2l)\} \\
&\qquad \subset \binom{[2l+1]}{2k+1}
\end{aligned}
$$

T.2015 と **Frankl-徳重 2016** の結果より

$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{n}$ が十分大きいとき、

$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の大対蹠集合は $\boldsymbol{k}$ の偶奇に応じて

$\boldsymbol{A\left(k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}$ または $\boldsymbol{A\left(k, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)}$

に合同

$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{n}$ があまり大きくない $\binom{[n]}{k}$ を考える

$$\boldsymbol{Ev_{2m} = \{\{\alpha(1), \ldots, \alpha(m)\} \mid}$$
$$\boldsymbol{\alpha(i) \in \{2i-1, 2i\}}, \text{偶数の } \boldsymbol{\alpha(i)} \text{ は偶数個}\}$$

とおくと $\boldsymbol{Ev_{2m}}$ は $\binom{[2m]}{m}$ の対蹠集合

定理 (T.2014)

(1) $\boldsymbol{2m \equiv 2, 4, 6 (\mathrm{mod} 8)}$ のとき、

$\boldsymbol{Ev_{2m}}$: $\binom{[2m]}{m}$ の MAS

(2) $\boldsymbol{Ev_{8m}}$: $\binom{[8m]}{4m}$ の MAS ではない

$\boldsymbol{Ev_{8m} \cup A(4m, 8m)}$: $\binom{[8m]}{4m}$ の MAS

前ページの定理の (2) の MAS を参考に以下を定める。

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m} = Ev_{8m} \cup A(4m, 8m),}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+2} = Ev_{8m+2} \cup}$$
$$\boldsymbol{A(4m-2, 8m+2) \times \{\{8m+3, 8m+4, 8m+5\}\},}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+4} = Ev_{8m+4} \cup}$$
$$\boldsymbol{A(4m, 8m+4) \times \{\{8m+5, 8m+6\}\},}$$

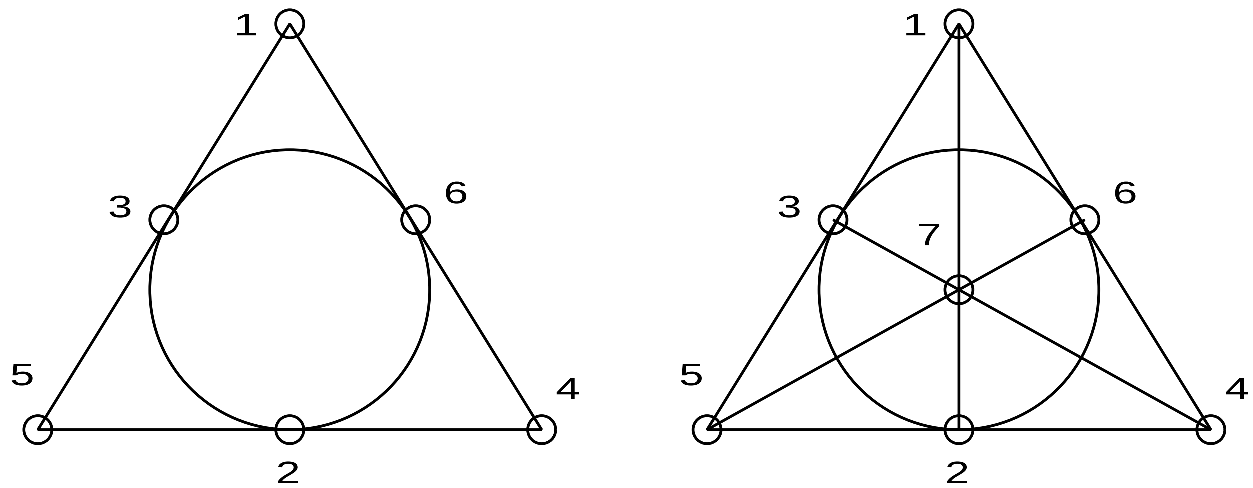
$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+6} = Ev_{8m+6} \cup A(4m+2, 8m+6) \times \{\{8m+7\}\}.}$$

定理 (T.)　以下は $\binom{[n]}{k}$ の MAS である。

$k \backslash n$	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$
$4m$	Ev^+_{8m}	Ev^+_{8m}	Ev^+_{8m}	Ev^+_{8m}
$4m+1$			Ev_{8m+2}	Ev_{8m+2}

$k \backslash n$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
$4m+1$	Ev_{8m+2}	Ev^+_{8m+2}		
$4m+2$	Ev_{8m+4}	Ev_{8m+4}	Ev^+_{8m+4}	
$4m+3$			Ev_{8m+6}	Ev^+_{8m+6}

$\boldsymbol{Ev_6}$ と $\boldsymbol{Ev_6^+}$



これらは $\binom{[\mathbf{6}]}{\mathbf{3}}$ と $\binom{[\mathbf{7}]}{\mathbf{3}}$ 内の $\mathbf{MAS}$ の分類に現れる。

$\boldsymbol{Ev_6}$ と $\boldsymbol{Ev_6^+}$