

複素旗多様体内の二つの実形の Floer ホモロジー

井川 治 (京都工芸繊維大学)

入江 博 (茨城大学)

奥田 隆幸 (広島大学)

酒井 高司 (首都大学東京)

田崎 博之 (筑波大学)

2018 年 3 月 20 日
日本数学会 2018 年度年会
於 東京大学

M : Kähler 多様体

L_0, L_1 : M の実形 (全測地的 Lagrange 部分多様体)

i.e. $\exists \tau_i : M$ の対合的反正則等長変換 ($i = 0, 1$)

s.t. $L_i = \text{Fix}(\tau_i, M)_0$

2015 年度年会

複素旗多様体 M の二つの実形 L_0, L_1 の交叉の構造

対蹠集合



主結果

複素旗多様体 M の二つの実形 (L_0, L_1) について,

$\mathbb{Z}_2$ 係数の Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ を計算

複素旗多様体と実旗多様体

(G, K) : コンパクト型対称対

$\theta : G$ の対合 s.t. $\text{Fix}(\theta, G)_0 \subset K \subset \text{Fix}(\theta, G)$

$x_0 (\neq 0) \in \mathfrak{p}$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$

$L := \text{Ad}_G(K)x_0 \subset \mathfrak{p}$ 実旗多様体, R 空間

$\cap$ $\cap$ $\cap$

$M := \text{Ad}_G(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$ 複素旗多様体, C 空間

$\cong G/G_{x_0}$

$(J, \omega) : M$ 上の G 不変 Kähler 構造

(Kirillov-Kostant-Souriau シンプレクティック形式)

$\tau = -d\theta : M \rightarrow M$: 対合的反正則等長変換

$L = M \cap \mathfrak{p} = \text{Fix}(\tau, M)$ M の実形

複素旗多様体の対蹠集合

定義

$x, y \in M$ について, y は x の対蹠点

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{すべての } g \in Z(G_x)_0 \text{ について } \text{Ad}(g)y = y$$

$\mathcal{A} \subset M$: 対蹠集合

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \text{任意の } x, y \in \mathcal{A} \text{ について } y \text{ は } x \text{ の対蹠点}$$

命題

① $x, y \in M$ について,

$$y \text{ は } x \text{ の対蹠点} \iff [x, y] = 0$$

② $\mathcal{A} \subset M$: 極大対蹠集合

$$\implies \exists \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g} : \text{極大可換部分環} \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{A} = M \cap \mathfrak{t}.$$

したがって, $\mathcal{A}$ は $\mathfrak{t}$ に関する $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の軌道.

特に, M のすべての極大対蹠集合は互いに G 合同.

二つの実旗多様体の交叉

$(G, K_0), (G, K_1)$: コンパクト型対称対

$\theta_0, \theta_1 : G$ の対合, $\theta_0 \theta_1 = \theta_1 \theta_0$ と仮定 $\rightsquigarrow (\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$: 対称三対

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0 = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{p}_1,$$

$$x_0 (\neq 0) \in \mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$$

$$L_0 := \text{Ad}(K_0)x_0, \quad L_1 := \text{Ad}(K_1)x_0 \subset M := \text{Ad}(G)x_0$$

$g \in G$ に対して, 交叉 $L_0 \cap \text{Ad}(g)L_1$ を考える.

$\mathfrak{a} : x_0$ を含む $\mathfrak{p}_0 \cap \mathfrak{p}_1$ の極大可換部分空間

定理 (2015 年度年会)

$a = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}$) に対して,

$$L_0 \cap \text{Ad}(a)L_1 \text{ が離散的} \iff H \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}$$

このとき, $L_0 \cap \text{Ad}(a)L_1$ は M の対蹠集合になり,

$$L_0 \cap \text{Ad}(a)L_1 = M \cap \mathfrak{a} = W(\tilde{\Sigma})x_0.$$

Lagrangian Floer ホモロジー

(M, ω) : 閉シンプレクティック多様体

$J = \{J_t\}_{0 \leq t \leq 1}$: ω と適合した M 上の概複素構造の族

L_0, L_1 : 閉 Lagrange 部分多様体, $L_0 \pitchfork L_1$

$$CF(L_0, L_1) := \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

$$\partial : CF(L_0, L_1) \longrightarrow CF(L_0, L_1)$$

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q$$

$$n(p, q) := \#\{\text{isolated } J\text{-holomorphic strips from } p \text{ to } q\} \pmod{2}$$

$$\partial \circ \partial = 0 \quad \implies \quad HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) := \ker \partial / \text{im } \partial$$

$$HF(\phi L_0, \psi L_1 : \mathbb{Z}_2) \cong HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) \quad \forall \phi, \psi \in \text{Ham}(M, \omega)$$

複素旗多様体の二つの実形の Floer ホモロジー

主定理

$M : G$ 不変な Kähler-Einstein 計量をもつ複素旗多様体

$L_0, L_1 \subset M$: 実旗多様体, $\theta_0 \theta_1 = \theta_1 \theta_0$

最小 Maslov 数 $\Sigma_{L_0}, \Sigma_{L_1} \geq 3$

$\implies L_1$ と合同な L'_1 で L_0 と横断的に交わるものが存在し,

$$HF(L_0, L'_1 : \mathbb{Z}_2) \cong \bigoplus_{p \in L_0 \cap L'_1} \mathbb{Z}_2[p]$$

- (証明のポイント) J -holomorphic strip のモジュライ空間に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用があることを示す.
- M が Hermite 対称空間の場合は, 入江-S.-田崎 2013.
- 定理から, Hamilton 変形の下での交点数の下からの評価が得られる.

Example

$$(G, K_0, K_1) = (SU(2n), SO(2n), Sp(n))$$

$$M = \text{Ad}(G)x_0 \cong F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})$$

$$L_0 = \text{Ad}(K_0)x_0 \cong F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$$

$$L_1 = \text{Ad}(K_1)x_0 \cong F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ or } \mathbb{H}$$

$$n, n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}, \quad n_{r+1} := n - (n_1 + \dots + n_r) > 0$$

$$F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = \left\{ (V_1, \dots, V_r) \left| \begin{array}{l} V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r \subset \mathbb{K}^n \\ \dim_{\mathbb{K}} V_j = n_1 + \dots + n_j \end{array} \right. \right\}$$

Example

$$\begin{aligned}
 & \dim HF(F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}), F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) : \mathbb{Z}_2) \\
 &= \#(F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}) \cap gF_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)) \\
 &= \#_I(F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)) = \dim H_*(F_{n_1, \dots, n_r}^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) : \mathbb{Z}_2) \\
 &= \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_{r+1}!} \\
 &< \#_I(F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})) = \dim H_*(F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n}) : \mathbb{Z}_2) \\
 &= \#_k(F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n})) = \dim H_*(F_{2n_1, \dots, 2n_r}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}) : \mathbb{Z}_2) \\
 &= \frac{(2n)!}{(2n_1)!(2n_2)! \cdots (2n_{r+1})!}
 \end{aligned}$$

ここで, $g = \exp H$ ($H \in \mathfrak{a}_{\text{reg}}$)

-  B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.
-  O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** no. 1 (2011), 79–136.
-  井川治、入江博、奥田隆幸、酒井高司、田崎博之「複素旗多様体内の二つの実形の交叉」日本数学会 2015 年度年会、幾何学分科会講演アブストラクト

-  H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135–1151.
-  H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.