古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合 I

田中 真紀子　(東京理科大学理工学部)*1
田崎 博之　　(筑波大学数理物質系)*2

2015 年秋、2016 年春、秋の学会で、我々は古典型コンパクト Lie 群の商群等の極大対蹠部分群の分類結果を発表した。今回はその分類結果等を使って得られた古典型コンパクト対称空間およびその商空間の極大対蹠集合の分類結果について発表する。

M をコンパクト Riemann 対称空間とし、$x \in M$ における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S のすべての点 x, y に対して $s_x(y) = y$ が成り立つとき、S を**対蹠集合**という。包含関係に関して極大な対蹠集合を考察の対象にする。

結果を記述するためにいくつかの記号を定めておく。n 次単位行列を 1_n で表す。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \qquad \Delta_n^{\pm} = \{ d \in \Delta_n \mid \det(d) = \pm 1 \}$$

とすると、Δ_n は $O(n), U(n), Sp(n)$ の共役を除いて一意的な極大対蹠部分群である。

$$D[4] = \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} \subset O(2), \quad I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

によって二面体群 $D[4]$ を定める。自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して s 個の $D[4]$ と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$D(s, n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

で表し、その部分集合 $PD(s, n), ND(s, n)$ を次で定める。

$$PD(s, n) = \{ d \in D(s, n) \mid d^2 = 1_n \}, \quad ND(s, n) = \{ d \in D(s, n) \mid d^2 = -1_n \}.$$

$\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のうちのいずれかとし、$O(n, \mathbb{K})$ を $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合は $O(n)$、$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合は $U(n)$、$\mathbb{K} = \mathbb{H}$ の場合は $Sp(n)$ として定める。四元数の基本単位を $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ で表す。

$CI(n) = \{ x \in Sp(n) \mid x^2 = -1_n \} \cong Sp(n)/U(n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間である。$\mathbf{i}\Delta_n \subset CI(n)$ は $Sp(n)$ の極大対蹠集合であり、$CI(n)$ の合同を除いて唯一の極大対蹠集合である。$Sp(n)^* = Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ とおく。$Sp(n)$ 内の -1_n による積は $CI(n)$ を保つので、$CI(n)^* = CI(n)/\{\pm 1_n\}$ を考えることができる。$\pi_n : Sp(n) \to Sp(n)^*$ を自然な射影とする。

定理 1　$CI(n)^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同：

$$\pi_n(ND(s, n) \cup \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} PD(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く。

$\mathbb{K}^n$ 内の m 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間からなる Grassmann 多様体を $G_m(\mathbb{K}^n)$ で表す。これらは $O(n, \mathbb{K})$ の単位元における点対称の不動点集合 $F(s_e, O(n, \mathbb{K}))$ の連結成分として実現で

*1 e-mail: tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp
*2 e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

き、埋め込み $G_m(\mathbb{K}^n) \ni x \mapsto 1_x - 1_{x^\perp} \in O(n,\mathbb{K})$ によって定まる。

$$\left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{bmatrix} \in \Delta_n \;\middle|\; \begin{array}{l} |\{i \mid \varepsilon_i = 1\}| = m \\ |\{j \mid \varepsilon_j = -1\}| = n-m \end{array} \right\} \subset G_m(\mathbb{K}^n)$$

は $G_m(\mathbb{K}^n)$ の極大対蹠集合であり、$G_m(\mathbb{K}^n)$ の合同を除いて唯一の極大対蹠集合である。以下では、$n = 2m$ の場合を考える。この場合、$\gamma : G_m(\mathbb{K}^{2m}) \to G_m(\mathbb{K}^{2m})$, $\gamma(x) = x^\perp$ という対合的等長変換が存在し、$G_m(\mathbb{K}^{2m})^* = G_m(\mathbb{K}^{2m})/\{\mathrm{id}, \gamma\}$ を定めることができる。$G_m(\mathbb{K}^{2m})^* \subset O(2m,\mathbb{K})^* = O(2m,\mathbb{K})/\{\pm 1_{2m}\}$ となる。$\pi_{2m} : O(2m,\mathbb{K}) \to O(2m,\mathbb{K})^*$ を自然な射影とする。

定理 2　$2m$ を $2m = 2^k \cdot l$ と 2 の冪 2^k と奇数 l の積に分解する。

(I) $G_m(\mathbb{R}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同：

$\Phi_s = \pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s, 2m) \mid \exists d_i (0 \le i \le s)\ \mathrm{Tr} d_i = 0\})$

ただし、$0 \le s \le k$ であり、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く。

(II) $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同：$\Phi_s \cup \pi_{2m}(\sqrt{-1} ND(s, 2m))$

ただし、$0 \le s \le k$ であり、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く。

(III) $G_m(\mathbb{H}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同：$\Phi_s \cup \pi_{2m}(\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} ND(s, 2m))$

ただし、$0 \le s \le k$ であり、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く。

$\{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$ は二つの等長的な連結成分を持つ。$\mathrm{diag}\{J_1, \dots, J_1\}$ を含む連結成分を $DIII(n) \cong SO(2n)/U(n)$ と定める。

$$\Gamma_n = \{\mathrm{diag}\{\epsilon_1 J_1, \dots, \epsilon_n J_1\} \mid \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1\}$$

は $DIII(n)$ の極大対蹠集合であり、$DIII(n)$ の合同を除いて唯一の極大対蹠集合である。n が奇数の場合、-1_{2n} による積で $DIII(n)$ ともう一つの連結成分は写り合う。n が偶数の場合、-1_{2n} による積は $DIII(n)$ を保ち、$DIII(n)^* = DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$ を考えることができる。$DIII(n)^* \subset SO(2n)^* = SO(2n)/\{\pm 1_{2n}\}$ となる。$\pi_{2n} : SO(2n) \to SO(2n)^*$ を自然な射影とする。$DIII(2)^* \cong \mathbb{R}P^2$ と $DIII(4)^* \cong G_2(\mathbb{R}^8)$ についてはすでにわかっているので、n が 6 以上の偶数の場合を考える。

定理 3　(1) $DIII(6)^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同：$\{\pi_{12}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_6^-\}$,

$\{\pi_{12}(J_1 \otimes d_1 \otimes d_0) \mid d_1 \in \{I_1, K_1\}, d_0 \in \Delta_3\} \cup \{\pi_{12}(1_2 \otimes J_1 \otimes d_0) \mid d_0 \in \Delta_3\}$

(2) $DIII(8)^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同：

$\{\pi_{16}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_8^+\}$, $\pi_{16}(ND(2, 16))$, $\pi_{16}(ND(4, 16))$

(3) $n = 4m + 2\,(m \ge 2)$ のとき、$DIII(n)^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同：

$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^-\}$,

$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d_1 \otimes d_0) \mid d_1 \in \{I_1, K_1\}, d_0 \in \Delta_{2m+1}\} \cup \{\pi_{2n}(1_2 \otimes J_1 \otimes d_0) \mid d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$

(4) $n = 4m\,(m \ge 3)$ のとき、$DIII(n)^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同：

$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^+\}$, $\pi_{2n}(ND(s, 2n))\ (2 \le s \le k)$

ただし、$(s, 2n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く。

他の古典型コンパクト対称空間およびその商空間 $UI(n) = U(n)/O(n)$, $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$, $AI(n) = SU(n)/SO(n)$, $AI(n)/\mathbb{Z}_\mu$(μ は n を割り切る), $UII(n) = U(2n)/Sp(n)$, $UII(n)/\mathbb{Z}_\mu$ $AII(n) = SU(2n)/Sp(n)$, $AII(n)/\mathbb{Z}_\mu$(μ は n を割り切る) の極大対蹠集合の分類も進んでいる。これらについては次の機会に発表したい。