古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合 I

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)

田崎 博之 (筑波大学数理物質系)

2018 年 9 月 24 日

(G,K) : コンパクト対称対

G/K : コンパクト対称空間

G/K を G 内に実現

G の極大対蹠部分群の分類

$\Rightarrow G/K$ の極大対蹠集合の分類

$G/K = CI(n) \cong Sp(n)/U(n), CI(n)/\mathbb{Z}_2,$

$G_m(\mathbb{K}^n)\ (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}), G_m(\mathbb{K}^{2m})/\mathbb{Z}_2,$

$DIII(n) \cong SO(2n)/U(n),$

$DIII(2m)/\mathbb{Z}_2$: これらの場合の極大対蹠集合の分類結果はアブストラクトの通り

$CI(n), CI(n)/\mathbb{Z}_2$ を例に分類の方針を説明

定義 (Chen-**長野**)

M : **コンパクト** Riemann **対称空間**

s_x : $x \in M$ **における点対称**

$S \subset M$: **対蹠集合**

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \; s_x(y) = y$$

コンパクト型既約 Hermite 対称空間

$$\begin{aligned} \boldsymbol{CI(n)} &= \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Sp(n)} \mid \boldsymbol{x}^2 = -\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n}}\} \\ &= \{\boldsymbol{g}\mathbf{i}\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{g}^{-1} \mid \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{Sp(n)}\} \\ &\cong \boldsymbol{Sp(n)/U(n)} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{Sp(n)}$ の極大対蹠部分群は $\boldsymbol{\Delta_n}$ に共役

$$\boldsymbol{\Delta_n} = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset \boldsymbol{O(n)}$$

$\mathrm{i}\Delta_n \subset CI(n) \subset Sp(n)$ となり、$CI(n)$ の極大対蹠集合は $\mathrm{i}\Delta_n$ に合同。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$Q[8] = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$$

$n = 2^k \cdot l$ (l:奇数) $0 \leq s \leq k$ に対して s 個の $D[4]$ と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$D(s,n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

で表す。

$\pi_n : Sp(n) \to Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ 自然な射影

$Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\pi_n(Q[8] \cdot D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外

$$PD(s,n) = \{d \in D(s,n) \mid d^2 = 1_n\},$$
$$ND(s,n) = \{d \in D(s,n) \mid d^2 = -1_n\}$$

とおくと

$$Q[8] \cdot D(s,n) \cap CI(n)$$
$$= ND(s,n) \cup \{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\} PD(s,n)$$

これより、$CI(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同になる。

$$\pi_n(ND(s,n) \cup \{\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{k}\} PD(s,n))$$
$$(0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外