古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合II

田中 真紀子　(東京理科大学理工学部)[*1]
田崎 博之　(筑波大学数理物質系)[*2]

2018年秋の学会で、「古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合I」という題名で、
(1) $CI(n) \cong Sp(n)/U(n)$ が二重に被覆する $CI(n)^* = CI(n)/\{\pm 1_n\}$
(2) Grassmann 多様体が二重に被覆する $G_m(\mathbb{K}^{2m})^* = G_m(\mathbb{K}^{2m})/\mathbb{Z}_2$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$
(3) $DIII(n) \cong SO(2n)/U(n)$ が二重に被覆する $DIII(n)^* = DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$
の極大対蹠集合の分類結果を発表した。($CI(n)$、Grassmann 多様体、$DIII(n)$ の極大対蹠集合の分類は比較的容易にできる。) この結果は論文 [3] で発表した。他の古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類を進めるためには、それを非連結コンパクト Lie 群の極地として実現することが有効であり、そのために 2021 年春の学会で「非連結コンパクト Lie 群の極地」という題名で非連結コンパクト Lie 群の極地の記述の求め方について発表した。この成果は論文 [4] にまとめて、現在投稿中である。今回はこれを適用して得られた
(4) $UI(n) \cong U(n)/O(n)$ が被覆する $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$
の極大対蹠集合の分類結果を発表する。

まず、Chen-Nagano[1] が導入した基本的な用語の説明をしておく。M をコンパクト Riemann 対称空間とし、$x \in M$ における点対称を s_x で表す。s_x の不動点集合の連結成分を x の**極地**という。M の部分集合 S のすべての点 x, y に対して $s_x(y) = y$ が成り立つとき、S を**対蹠集合**という。包含関係に関して極大な対蹠集合を**極大対蹠集合**という。コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、これに関して Riemann 対称空間になる。コンパクト Lie 群の場合、単位元を含む極大対蹠集合は部分群になることがわかる。これを**極大対蹠部分群**と呼ぶ。

結果を記述するためにいくつかの記号を定めておく。n 次単位行列を 1_n で表す。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

とする。Δ_n は $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ の極大対蹠部分群になる。

$$D[4] = \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} \subset O(2), \quad I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

によって二面体群 $D[4]$ を定める。自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して s 個の $D[4]$ と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$D(s, n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

で表し、その部分集合 $PD(s, n)$ を次で定める。

$$PD(s, n) = \{d \in D(s, n) \mid d^2 = 1_n\}.$$

[*1] e-mail: tanaka_makiko@ma.noda.tus.ac.jp
[*2] e-mail: tasaki@math.tsukuba.ac.jp

$U(n)$ の対合的自己同型写像 σ_I を

$$\sigma_I : U(n) \to U(n)\ ;\ g \mapsto \bar{g}$$

によって定め、コンパクト対称空間 $UI(n)$ を

$$UI(n) = \{g \in U(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\} \cong U(n)/O(n)$$

によって定める。$U(n)$ の自己同型群内の σ_I が生成する部分群 $\langle\sigma_I\rangle$ と $U(n)$ の半直積を $U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ で表す。$UI(n)$ は $U(n)$ の極地にはならないが、半直積 $U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ の極地になることがわかる。任意の自然数 μ について $\mathbb{Z}_\mu = \{z1_n \mid z \in \mathbb{C},\, z^\mu = 1\}$ は $U(n)$ の中心に含まれる。$\pi_n : U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle \to (U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ を自然な射影とする。$(U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類は Tanaka-Tasaki[2] ですでに得ている。この論文の Theorem 5 の主張を書き直すと以下のようになる。

定理 1　$n = 2^k \cdot l$ と分解する。ただし、l は奇数である。θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。このとき、$(U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに $\pi_n(U(n), e)$ の元で共役になる。

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\Delta_n \rtimes \langle\sigma_I\rangle)$.

(2) μ が偶数のとき、$\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle)$. ただし、$0 \leq s \leq k$ であり、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

この結果を利用して次の定理を得る。

定理 2　$n = 2^k \cdot l$ と θ は定理 1 と同様とする。このとき、$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ 合同になる。

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\Delta_n)$.

(2) μ が偶数のとき、$\pi_n(\{1, \theta\}PD(s, n))$. ただし、$0 \leq s \leq k$ であり、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of the automorphism groups of compact Lie algebras, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **203**, Y.J. Suh et al. (eds.), "Hermitian-Grassmannian Submanifolds," (2017), 39–47.

[3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal sets of compact classical symmetric spaces and their cardinalities I, Differ. Geom. Appl. **73** (2020), 101682 (32 pages).

[4] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Polars of disconnected compact Lie groups, preprint.