古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合 II

田中 真紀子 (東京理科大学理工学部)

田崎 博之 (筑波大学数理物質系)

2021 年 9 月 16 日

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合 (Chen-長野 [1])

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ s_x(y) = y$

極大対蹠集合 : 包含関係の意味で極大

$F(s_x, M)$ の連結成分 : 極地

G/K : 連結コンパクト Riemann 対称空間

G/K を G 内に極地として実現

G の極大対蹠部分群の分類

$\Rightarrow G/K$ の極大対蹠集合の分類

前ページの方針のもとで得た以下の空間の極大対蹠集合の分類について、2018 年度秋の学会で発表した。

$CI(n) \cong Sp(n)/U(n), CI(n)/\mathbb{Z}_2,$

$G_m(\mathbb{K}^n)\ (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}), G_m(\mathbb{K}^{2m})/\mathbb{Z}_2,$

$DIII(n) \cong SO(2n)/U(n),$

$DIII(2m)/\mathbb{Z}_2$

これらの分類結果の論文発表：

アブストラクトの参考文献 [3]

連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない場合、非連結コンパクト Lie 群の極地として実現することが有効

非連結コンパクト Lie 群の極地：

[4] Contemp. Math. に掲載予定

Hermann 作用の性質を利用して記述

(連結コンパクト Lie 群の共役作用と極大トーラスの類似)

2021 年度春の学会で発表

今回、一般的方針と [2], [4] の結果を利用して、
次の空間の極大対蹠集合を分類した。

$$UI(n) = \{g \in U(n) \mid \bar{g} = g^{-1}\} \cong U(n)/O(n),$$

$$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \quad \mathbb{Z}_\mu = \{z1_n \mid z \in \mathbb{C},\ z^\mu = 1\}$$

これらは連結コンパクト Lie 群の極地としては
実現できない。

$\sigma_I(g) = \bar{g}$: $U(n)$ の対合的自己同型写像
半直積 $U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle$: 非連結
$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$: $U(n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_I \rangle$ の極地

$\boldsymbol{\pi_n : U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_I \rangle}$

$\boldsymbol{n = 2^k \cdot l,\ l}$: 奇数、$\boldsymbol{\theta}$: $\boldsymbol{1}$ の原始 $\boldsymbol{2\mu}$ 乗根

分類結果にある記号はアブストラクト参照

定理 1　$\boldsymbol{(U(n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)/\mathbb{Z}_\mu}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに $\pi_n(U(n), e)$ 共役

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\boldsymbol{\Delta}_n \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle)$.

(2) μ が偶数のとき、

$\boldsymbol{\pi_n(\{1, \theta\} D(s, n) \rtimes \langle \sigma_I \rangle)\ (0 \le s \le k)}$、

$\boldsymbol{(s, n) = (k-1, 2^k)}$: 除外

定理 2 $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ 合同

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\Delta_n)$.

(2) μ が偶数のとき、$\pi_n(\{1,\theta\}PD(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$、$(s,n)=(k-1,2^k)$：除外

現在、以下の空間とその商空間の極大対蹠集合の分類を進めている。

$$UII(n) \cong U(2n)/Sp(n),$$
$$AI(n) \cong SU(n)/SO(n),$$
$$AII(n) \cong SU(2n)/Sp(n)$$