古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合III

田中 真紀子 (東京理科大学創域理工学部)

田崎 博之 (東京都立大学理学研究科、筑波大学数理物質系)

2023年9月20日

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合 (Chen-長野 1988)

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \ s_x(y) = y$

極大対蹠集合 : 包含関係の意味で極大

大対蹠集合 : 濃度が最大の対蹠集合

$F(s_x, M)$ の連結成分 : 極地

G/K : 連結コンパクト Riemann 対称空間

G/K を G 内に極地として実現

G の極大対蹠部分群の分類

$\Rightarrow G/K$ の極大対蹠集合の分類

前ページの方針のもとで得た以下の空間の極大対蹠集合の分類について、2018 年度秋の学会で発表した。

$$CI(n) \cong Sp(n)/U(n), CI(n)/\mathbb{Z}_2,$$
$$G_m(\mathbb{K}^n)\ (\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}), G_m(\mathbb{K}^{2m})/\mathbb{Z}_2,$$
$$DIII(n) \cong SO(2n)/U(n),$$
$$DIII(2m)/\mathbb{Z}_2$$

連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない場合、非連結コンパクト Lie 群の極地として実現することが有効

非連結コンパクト Lie 群の極地：

Hermann 作用の性質を利用して記述

(連結コンパクト Lie 群の共役作用と極大

トーラスの類似)

2021 年度春の学会で発表

この手法を利用して、次の空間の極大対蹠集合

を分類した。

$$UI(n) = \{g \in U(n) \mid \bar{g} = g^{-1}\} \cong U(n)/O(n),$$

$$UI(n)/\mathbb{Z}_\mu, \quad \mathbb{Z}_\mu = \{z1_n \mid z \in \mathbb{C},\, z^\mu = 1\}$$

2021 年秋の学会で発表

$U(2n)$ の対合的自己同型写像 σ_{II} を

$$\sigma_{II} : U(2n) \to U(2n) \ ; \ g \mapsto J_n \bar{g} J_n^{-1},$$

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{bmatrix} = J_1 \otimes 1_n$$

によって定め、コンパクト対称空間 $UII(n)$ を

$$\begin{aligned} UII(n) &= \{g \in U(2n) \mid \sigma_{II}(g) = g^{-1}\} \\ &\cong U(2n)/Sp(n) \end{aligned}$$

によって定める。

$UI(n), UII(n)$ は連結コンパクト Lie 群の極地としては実現できない。

$U(2n)$ の自己同型群内の σ_{II} が生成する部分群 $\langle\sigma_{II}\rangle$ と $U(2n)$ の半直積：

$U(2n) \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$：非連結

$UII(n)/\mathbb{Z}_\mu$：$U(2n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle\sigma_{II}\rangle$ の極地

分類結果記述のため次の $E(n)$ を導入しておく。

$$E(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, d_1, d_2 \in \Delta_n \right\} \subset O(2n).$$

$\pi_{2n} : U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle \to U(2n)/\mathbb{Z}_\mu \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$

$n = 2^k \cdot l,\ l$: 奇数、θ : 1 の原始 2μ 乗根

分類結果にある記号はアブストラクト参照

定理 1　$(U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに $\pi_{2n}(U(2n))$ 共役になる。

(1) μ が奇数の場合

$$\pi_{2n}(\Delta_{2n}, 1), \quad \pi_{2n}((1_2 \otimes \Delta_n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle).$$

(2) μ が偶数の場合

$$(2.1) \quad \pi_{2n}((\{1, \theta\}\Delta_{2n}, 1) \cup (\{1, \theta\}E(n), \sigma_{II})),$$

$$(2.2) \quad \pi_{2n}(\{1, \theta\}D(s+1, 2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理 2　$UII(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $U(2n)/\mathbb{Z}_\mu$ 合同になる。

(1) μ が奇数の場合、$\pi_{2n}(1_2 \otimes \Delta_n)$.

(2) μ が偶数の場合、

$$\pi_{2n}(\{1,\theta\}(1_2 \otimes PD(s,n) \cup \{I_1, J_1, K_1\} \otimes ND(s,n)))$$

ただし、$0 \leq s \leq k$ であり、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

さらに

$$AI(n) \cong SU(n)/SO(n),$$
$$AII(n) \cong SU(2n)/Sp(n)$$

とその商空間についても極大対蹠集合を分類できる。