有向実Grassmann多様体の対蹠集合の織り方

田崎博之

筑波大学数理物質系

2018年2月16日

微分幾何学セミナー

OCAMI(大阪市立大学 数学研究所)

1　対蹠集合

定義 (**Chen-長野**)

M : コンパクト Riemann 対称空間

s_x : $x \in M$ における点対称

$S \subset M$: 対蹠集合

$\quad \Leftrightarrow \forall x, y \in S \ s_x(y) = y$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow |S|$: 最大値

上記最大値 $\#_2 M$: **2-number**

対称 $\boldsymbol{R}$ 空間の場合

2-number：Chen-長野、竹内

大対蹠集合の形：**Sánchez, 田中-T.**

対称 $\boldsymbol{R}$ 空間ではない場合

2-number：Chen-長野

対蹠集合の全体：わかりつつある

例外：階数 **3** 以上の有向実 **Grassmann** 多様体、$\boldsymbol{Spin(n)}$ $(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{7})$

2　有向実 Grassmann 多様体

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$

　：$\mathbb{R}^n$ 内の k 次元有向部分空間全体

$SO(n)$ 不変 Riemann 計量により

$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$：Riemann 対称空間

正の向きの正規直交基底の外積を対応

$$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n) \subset \bigwedge^k \mathbb{R}^n$$

X：集合、k：自然数

$\binom{X}{k} = \{\alpha \subset X \mid |\alpha| = k\}$

$[n] = \{1, \ldots, n\}$

$\alpha, \beta \in \binom{[n]}{k}$ に対して

$\alpha \backslash \beta = \{i \in \alpha \mid i \notin \beta\}$

α, β：対蹠的 $\Leftrightarrow$ $|\alpha \backslash \beta|$：偶数

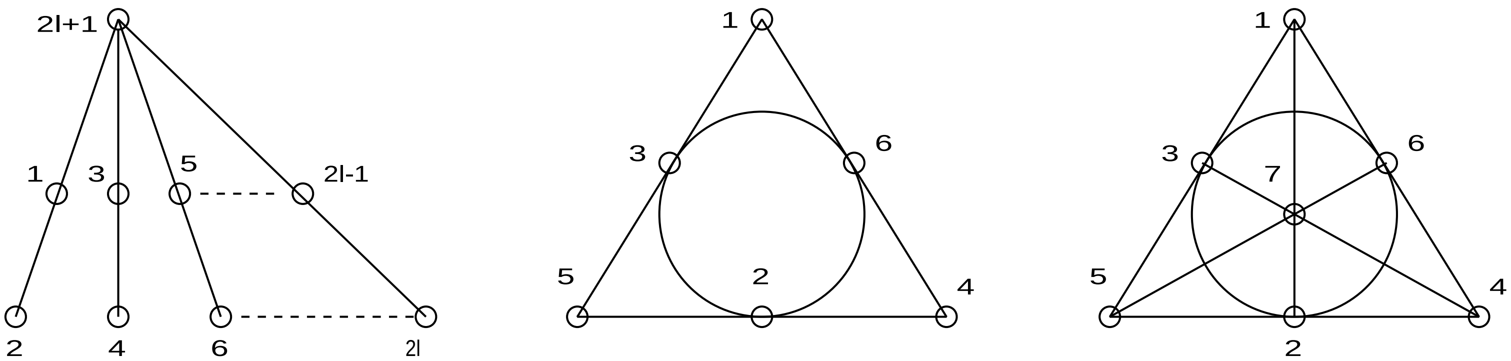
$A \subset \binom{[n]}{k}$：対蹠集合

$\Leftrightarrow$ α, β：対蹠的 $(\forall \alpha, \beta \in A)$

$\binom{[n]}{\mathbf{1}}$ の対蹠集合： 一点のみ

$\binom{[n]}{\mathbf{2}}$ の対蹠集合 $\{\{\mathbf{1},\mathbf{2}\},\{\mathbf{3},\mathbf{4}\},\cdots\}$

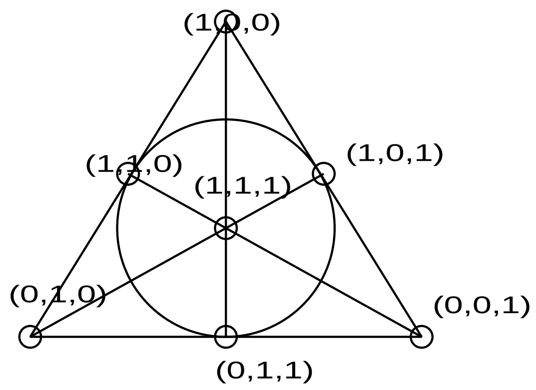
$\binom{[n]}{\mathbf{3}}$ の対蹠集合



三番目：**Fano** 平面 (二元体上の射影平面)

Fano平面 $\mathbb{F}_2 P^2 = \mathbb{F}_2^3 \backslash \{(0,0,0)\}$

$$x_1 = 0 : \{(0,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$$
$$x_2 = 0 : \{(1,0,0), (0,0,1), (1,0,1)\}$$
$$x_3 = 0 : \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\}$$
$$x_1 + x_2 = 0 : \{(0,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$
$$x_1 + x_3 = 0 : \{(0,1,0), (1,0,1), (1,1,1)\}$$
$$x_2 + x_3 = 0 : \{(1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 : \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$$



定理 $(\mathbf{T.2013})$

$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合の分類

$\leftrightarrow \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の極大対蹠的集合の分類

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}$: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ の正規直交基底

$\boldsymbol{A}$: $\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の極大対蹠的集合

$\Rightarrow \{\pm\langle \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{k})}\rangle_{\mathbb{R}} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{A}\}$

: $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{k}}(\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}})$ の極大対蹠集合

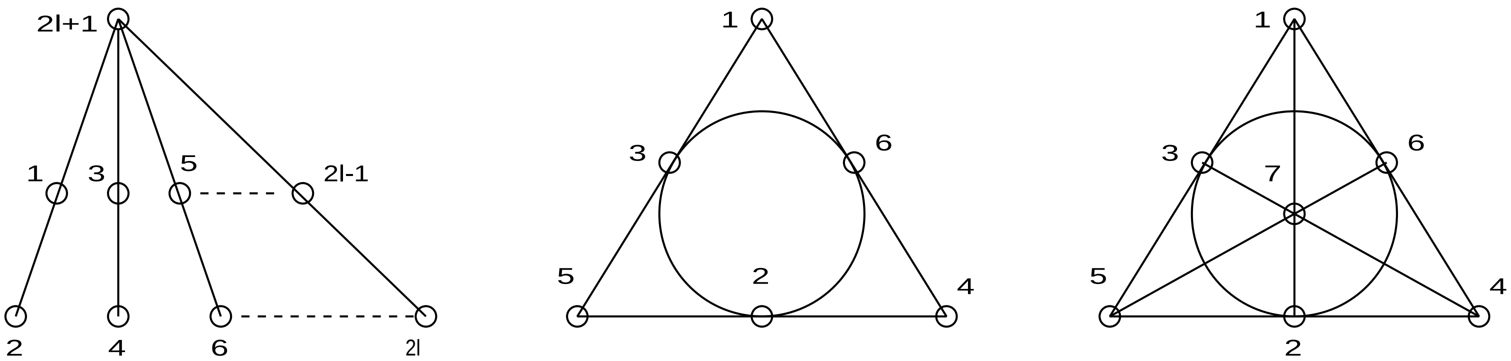
逆の対応も定まる

MAS：極大対蹠的部分集合

定理 (T.2013)　$k \leq 4$ のとき、

$\binom{[n]}{k}$ の MAS の分類完成

$k = 3$ の場合



$\binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$ $(\boldsymbol{k} \leq 4)$ の MAS の分類に現れる MAS

$\downarrow$ 一般化

$\boldsymbol{k} > 4$ のときの $\binom{[n]}{\boldsymbol{k}}$ の MAS の構成

：分類または性質を調べる

$$\boldsymbol{A(2,2l) = \{\{1,2\},\ldots,\{2l-1,2l\}\} \subset \binom{[2l]}{2}}$$

$$\boldsymbol{A(2k,2l)}$$

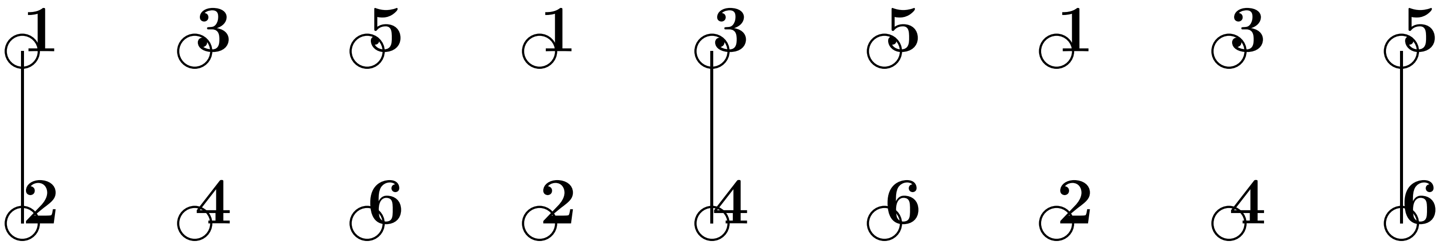
$$\boldsymbol{= \left\{ \alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_k \,\middle|\, \begin{array}{c} \alpha_i \in A(2,2l) \\ \alpha_i \neq \alpha_j \end{array} \right\} \subset \binom{[2l]}{2k}}$$

$$\boldsymbol{A(2k+1,2l+1)}$$

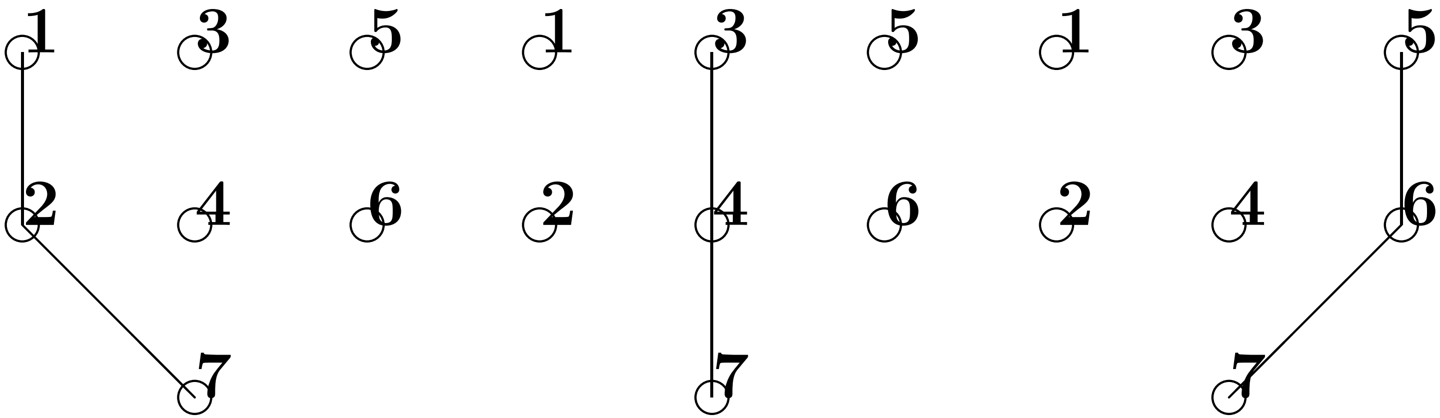
$$\boldsymbol{= \{\alpha \cup \{2l+1\} \mid \alpha \in A(2k,2l)\} \subset \binom{[2l+1]}{2k+1}}$$

これらは縦糸の集まりとみなせる。

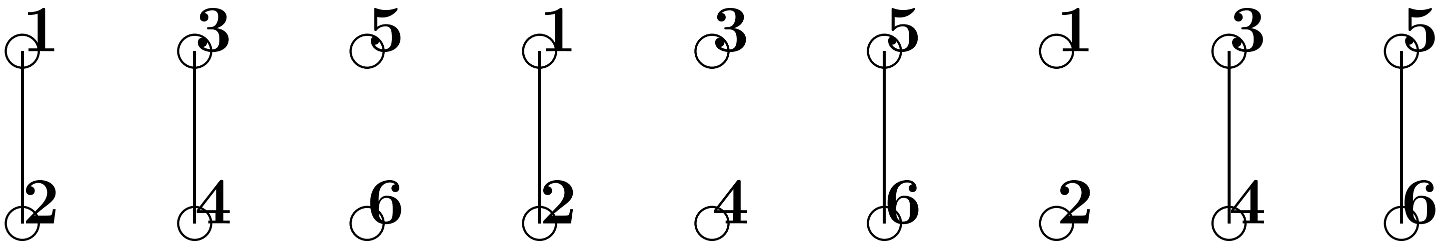
$$A(2,6)$$



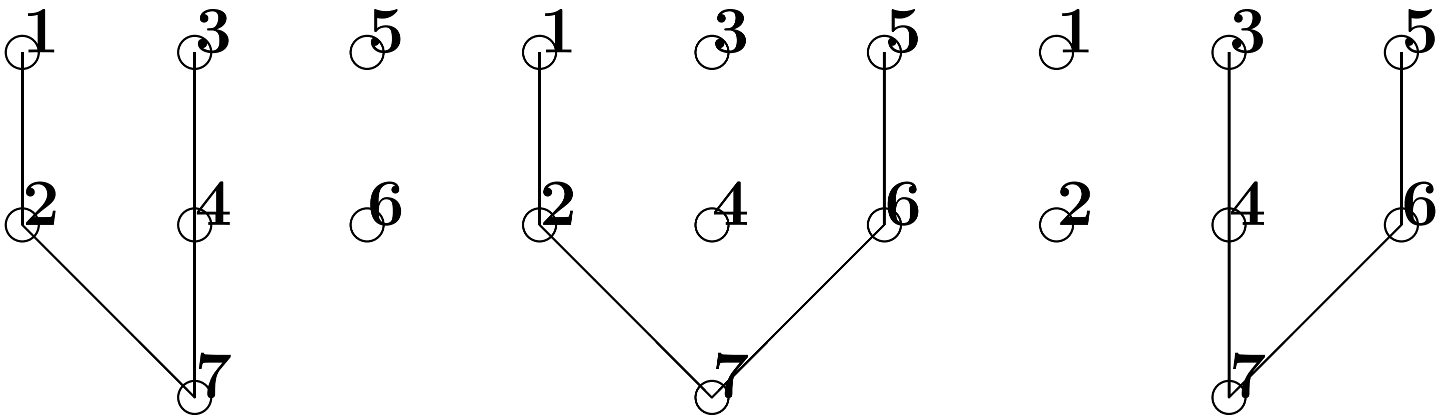
$$A(3,7) = \{\alpha \cup \{7\} \mid \alpha \in A(2,6)\}$$



$\boldsymbol{A(4,6)}$



$\boldsymbol{A(5,7) = \{\alpha \cup \{7\} \mid \alpha \in A(4,6)\}}$

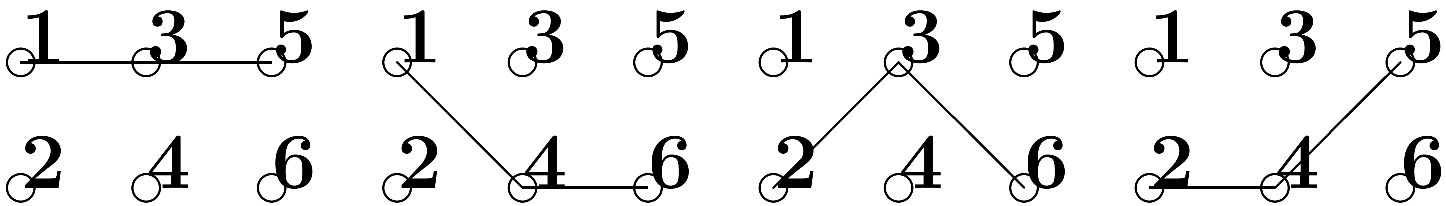


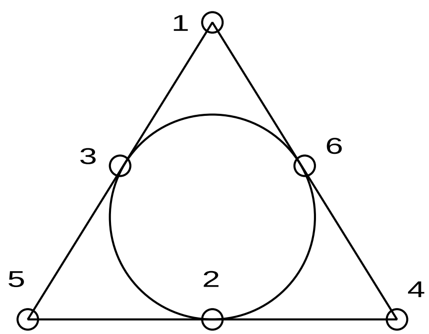
横糸の集まりとみなせるものを考える。

$$Ev_{2m} = \{\{\alpha(1), \dots, \alpha(m)\} \mid$$

$$\quad \alpha(i) \in \{2i-1, 2i\}, \text{偶数の } \alpha(i) \text{ は偶数個 } \}$$

とおくと $Ev_{2m} \subset \binom{[2m]}{m}$. 次は Ev_6





$\boldsymbol{X, Y}$: 集合 $\boldsymbol{X \cap Y = \emptyset}$

$\boldsymbol{A \subset \binom{X}{k}}$, $\boldsymbol{B \subset \binom{Y}{l}}$ に対して

$$\boldsymbol{A \times B := \{\alpha \cup \beta \mid \alpha \in A, \beta \in B\}}$$

$$\boldsymbol{\subset \binom{X \cup Y}{k+l}}$$

この記号を使うと $\boldsymbol{A(2k+1, 2l+1)}$ は

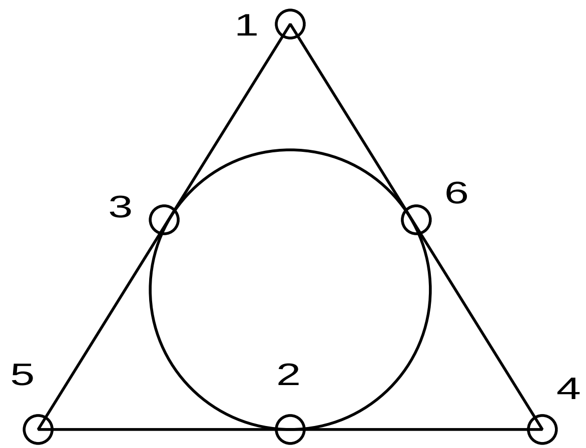
$\boldsymbol{A(2k, 2l) \times \{\{2l+1\}\}}$ と表せる。

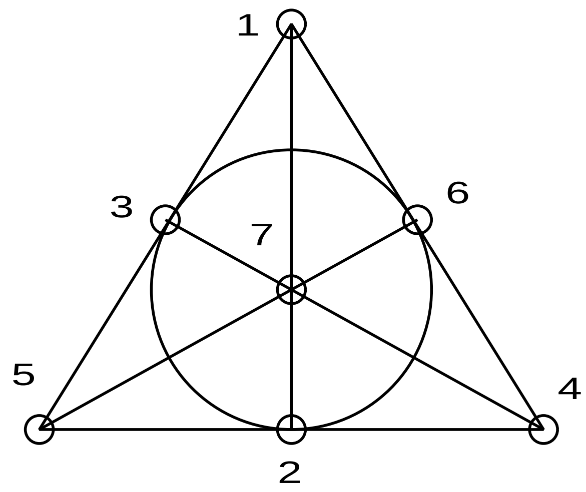
$\boldsymbol{A \subset \binom{[n]}{k}}$ と自然数 $\boldsymbol{m}$ に対して

$$\boldsymbol{A + m = \{\{i + m \mid i \in \alpha\} \mid \alpha \in A\}.}$$

$\boldsymbol{+m}$ だけ移動している

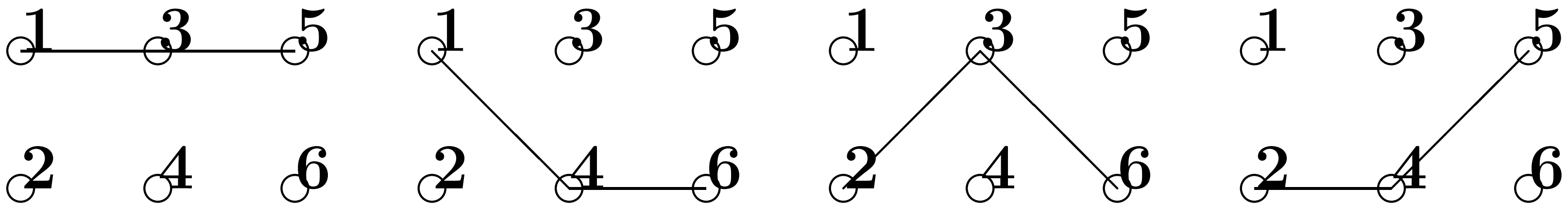
$\boldsymbol{Ev_6}$ と $\boldsymbol{Ev_6 \cup A(3,7)}$: **Fano 平面**

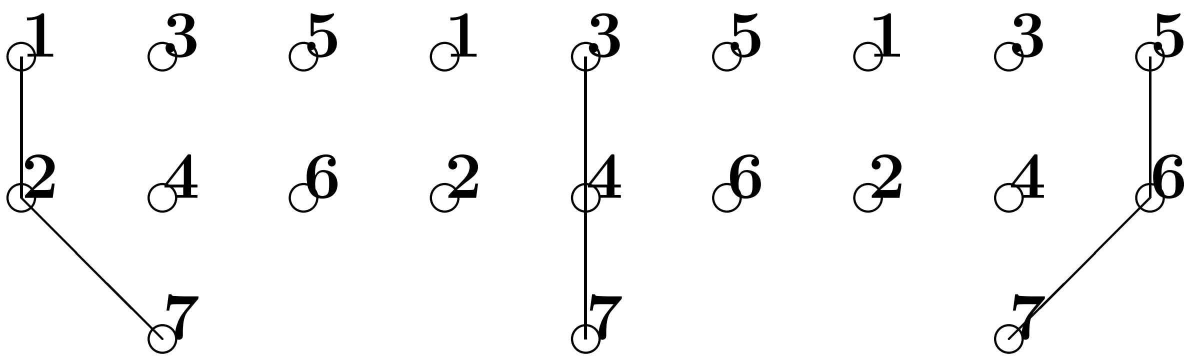




これらはそれぞれ $\binom{[\mathbf{6}]}{\mathbf{3}}$ と $\binom{[\mathbf{7}]}{\mathbf{3}}$ 内の唯一の **MAS** である。

Ev_6 と $Ev_6 \cup A(3,7)$





縦糸と横糸の集まりを織って$\boldsymbol{k} \leq 4$のときの$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$のMASの分類を記述する。

$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\mathbf{1}}$のMASは$\{[\mathbf{1}]\}$に合同。

$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\mathbf{2}}$のMASは$\boldsymbol{A}\left(\mathbf{2}, \mathbf{2}\left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}} \right\rfloor\right)$に合同。

$\binom{[\mathbf{3}]}{\mathbf{3}}, \binom{[\mathbf{4}]}{\mathbf{3}}$のMASは$[\mathbf{3}] = \boldsymbol{A}(\mathbf{3}, \mathbf{3})$に合同。

$\binom{[\mathbf{5}]}{\mathbf{3}}$のMASは$\boldsymbol{A}(\mathbf{3}, \mathbf{5})$に合同。

$\binom{[\mathbf{6}]}{\mathbf{3}}$のMASは$\boldsymbol{Ev}_{\mathbf{6}}$に合同。

$\binom{[\mathbf{7}]}{\mathbf{3}}, \binom{[\mathbf{8}]}{\mathbf{3}}$のMASは$\boldsymbol{Ev}_{\mathbf{6}} \cup \boldsymbol{A}(\mathbf{3}, \mathbf{7})$に合同。

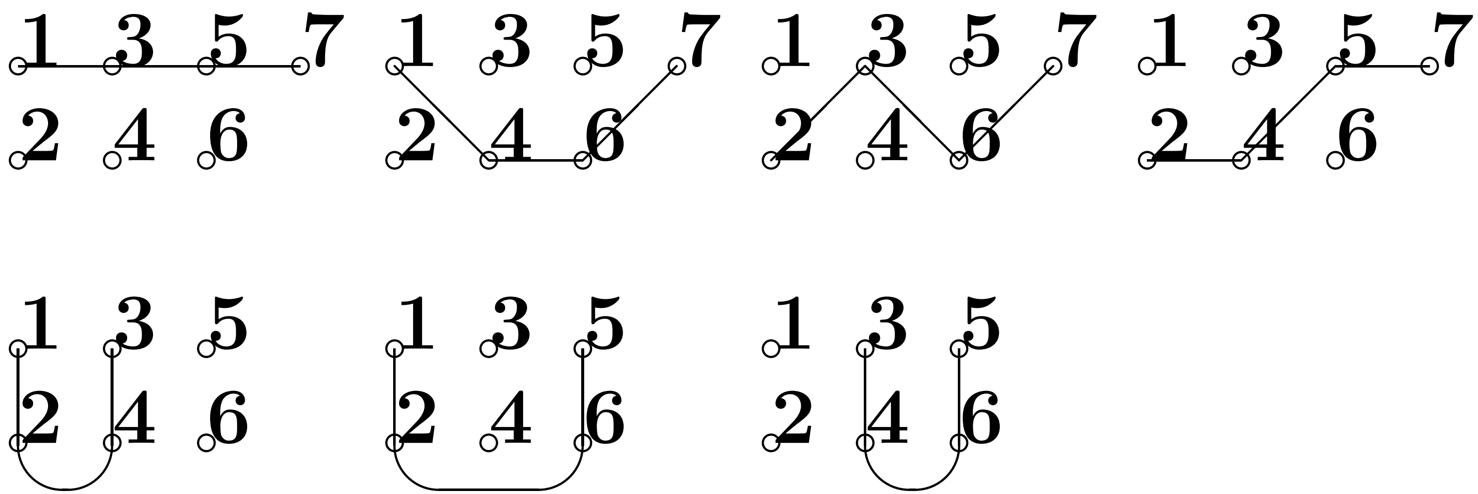
$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\mathbf{3}}$ $(\boldsymbol{n} \geq \mathbf{9})$のMASは$\boldsymbol{Ev}_{\mathbf{6}} \cup \boldsymbol{A}(\mathbf{3}, \mathbf{7})$または
$\boldsymbol{A}(\mathbf{3}, \mathbf{2}\left\lfloor \frac{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \right\rfloor + \mathbf{1})$に合同。

$\binom{[4]}{\mathbf{4}}, \binom{[5]}{\mathbf{4}}$ の MAS は $[4] = \boldsymbol{A}(4,4)$ に合同。

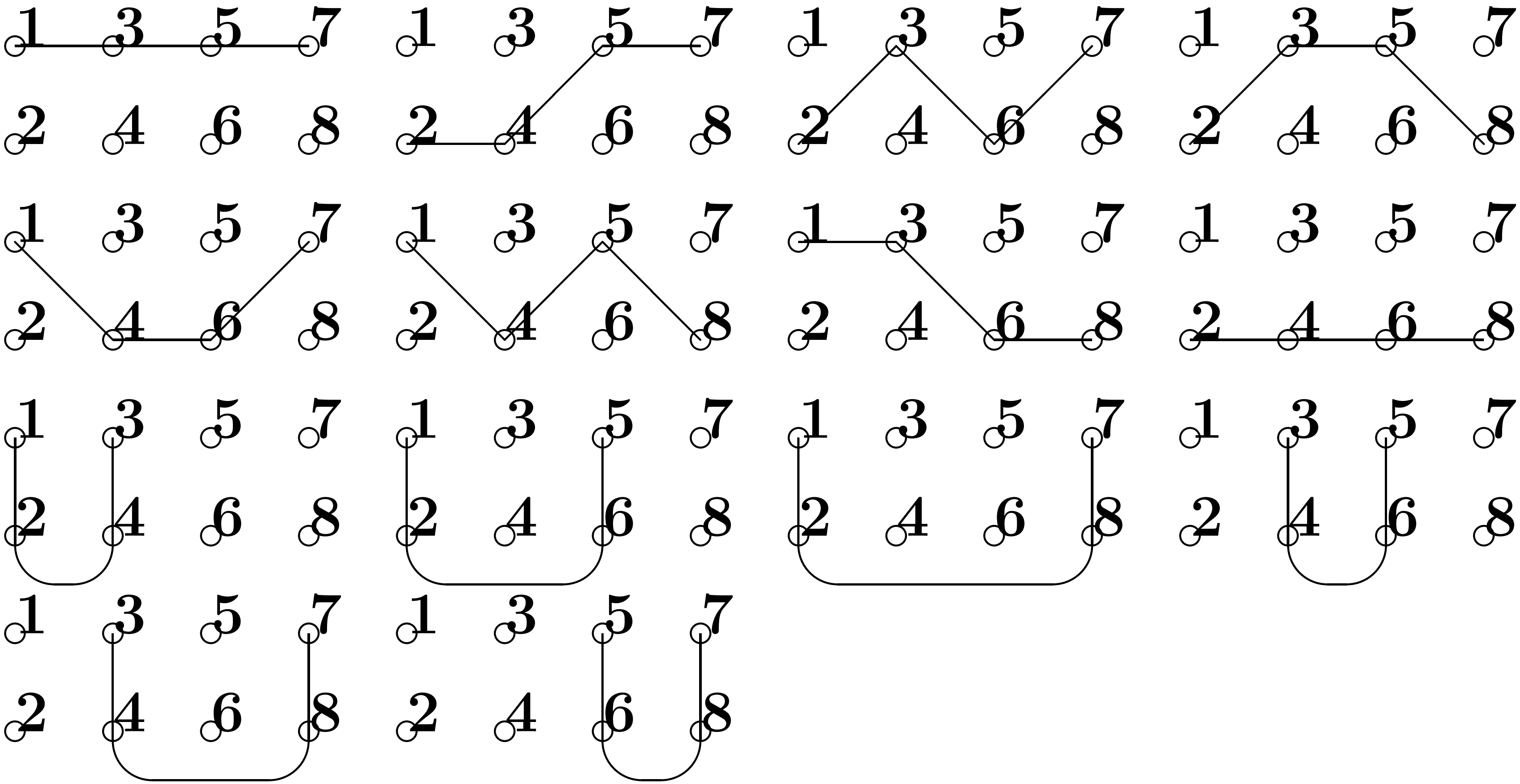
$\binom{[6]}{\mathbf{4}}$ の MAS は $\boldsymbol{A}(4,6)$ に合同。

$\binom{[7]}{\mathbf{4}}$ の MAS は

$\boldsymbol{B}(4,7) := \boldsymbol{A}(4,6) \cup \boldsymbol{Ev}_6 \times \{\{7\}\}$ に合同。



$\binom{[\mathbf{8}]}{\mathbf{4}}$, $\binom{[\mathbf{9}]}{\mathbf{4}}$ の MAS は $\boldsymbol{Ev_8^+} := \boldsymbol{A}(4,8) \cup \boldsymbol{Ev_8}$ に合同。



$\binom{[\mathbf{10}]}{\mathbf{4}}$ の MAS は $\boldsymbol{A}(4,10)$ または $\boldsymbol{Ev_8^+}$ に合同。

$\binom{[n]}{4}$ $(n \geq 11)$ の MAS は次のいずれかに合同。

$A\left(4, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$,

$B(4,7) \cup \left[\text{a full MAS in } \binom{[n-7]}{4} + 7\right]$,

$Ev_8^{+} \cup \left[\text{a MAS in } \binom{[n-8]}{4} + 8\right]$

A : full in $\binom{[n]}{k}$

$\Leftrightarrow \forall i \in [n]\ \exists \alpha \in A \text{ s.t. } i \in \alpha$

$$\Leftrightarrow [n] = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$$

定理 $(\mathbf{T.2014})$

$\boldsymbol{A(2k,2l), A(2k+1,2l+1)}$: $\mathbf{AS}$

$\boldsymbol{l \geq 3k+1}$ のとき

$\boldsymbol{A(2k,2l)}$: $\mathbf{MAS\ in}$ $\boldsymbol{\binom{[2l]}{2k}, \binom{[2l+1]}{2k}}$

$\boldsymbol{A(2k+1,2l+1)}$

: $\mathbf{MAS\ in}$ $\boldsymbol{\binom{[2l+1]}{2k+1}, \binom{[2l+2]}{2k+1}}$

$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{l}$ が大きいと縦糸の集まりは極大になる。

$$\boldsymbol{a(k,n) = \max\left\{|A| \;\middle|\; A:\ \text{AS in } \binom{[n]}{k}\right\}}$$

$$\boldsymbol{a(1,n) = 1 \qquad a(2,n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} a(2k,n) &\geq \left| A\left(2k, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\right| = \binom{\lfloor n/2 \rfloor}{k}, \\ a(2k+1,n) &\geq \left| A\left(2k+1, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)\right| \\ &= \binom{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}{k}. \end{aligned}}$$

$k \leq 4$ の場合の MAS の分類結果より

$$a(1,n) = 1, \quad a(2,n) = \lfloor n/2 \rfloor$$

n	4	5	6	$7,\ldots,16$	17 以上
$a(3,n)$	1	2	4	7	$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

n	5	6	7	$8,\ldots,11$	12 以上
$a(4,n)$	1	3	7	14	$\binom{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2}$

大きい数のときには、縦糸の集まりが最大値を与える。

定理 $\mathbf{(T.2015)}$

$$\boldsymbol{n \geq 87 \Rightarrow a(5,n) = \binom{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{2}}$$

$\boldsymbol{\binom{[n]}{5}}$ の大対蹠集合

$\boldsymbol{:\ A\left(5, 2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1\right)}$ と合同

次が成り立つことが期待される

$\boldsymbol{k}$ に対して $\boldsymbol{n}$ が十分大きい $\Rightarrow$

$\boldsymbol{\binom{[n]}{k}}$ の大対蹠集合は $\boldsymbol{A(2k', 2n')}$ または

$\boldsymbol{A(2k'+1, 2n'+1)}$ に合同

定理 **(Frankl-徳重 2016)**

$\boldsymbol{k}$: 自然数、$\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{k}$ に対して十分大きいとき、

$$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}} \text{の大対蹠集合} : \boldsymbol{A(k,l)} \text{ に合同}$$

ただし、$\boldsymbol{k}$ が奇数のとき $\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{n}$ 以下の最大奇数であり、$\boldsymbol{k}$ が偶数のとき $\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{n}$ 以下の最大偶数である。

$\boldsymbol{n}$ が $\boldsymbol{k}$ に対して十分大きいとき、$\binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{k}}$ の大対蹠集合は縦糸の集まりのみになる。

横糸の集まりの極大性

定理 $(\mathbf{T.2014})$

$(\mathbf{1})$ $\boldsymbol{2m \equiv 2, 4, 6(\mathrm{mod} 8)}$ のとき、

$\boldsymbol{Ev_{2m}}$: $\binom{[2m]}{m}$ の $\mathbf{MAS}$

$(\mathbf{2})$ $\boldsymbol{Ev_{8m}}$: $\binom{[8m]}{4m}$ の $\mathbf{MAS}$ ではない

$\boldsymbol{Ev_{8m} \cup A(4m, 8m)}$: $\binom{[8m]}{4m}$ の

$\mathbf{MAS}$

横糸 $\boldsymbol{Ev_*}$ と縦糸 $\boldsymbol{A(*,**)}$ の組合せ

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m} = Ev_{8m} \cup A(4m, 8m),}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+2} = Ev_{8m+2} \cup}$$
$$\boldsymbol{A(4m-2, 8m+2) \times \{\{8m+3, 8m+4, 8m+5\}\},}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+4} = Ev_{8m+4} \cup}$$
$$\boldsymbol{A(4m, 8m+4) \times \{\{8m+5, 8m+6\}\},}$$

$$\boldsymbol{Ev^+_{8m+6} = Ev_{8m+6} \cup A(4m+2, 8m+6) \times \{\{8m+7\}\}.}$$

定理 (T.2017)　以下は $\binom{[n]}{k}$ の MAS である。

$k \backslash n$	$8m$	$8m+1$	$8m+2$	$8m+3$
$4m$	Ev_{8m}^{+}	Ev_{8m}^{+}	Ev_{8m}^{+}	Ev_{8m}^{+}
$4m+1$			Ev_{8m+2}	Ev_{8m+2}

$k \backslash n$	$8m+4$	$8m+5$	$8m+6$	$8m+7$
$4m+1$	Ev_{8m+2}	Ev_{8m+2}^{+}		
$4m+2$	Ev_{8m+4}	Ev_{8m+4}	Ev_{8m+4}^{+}	
$4m+3$			Ev_{8m+6}	Ev_{8m+6}^{+}

さらなる横糸と縦糸の組合せ

$\Rightarrow \boldsymbol{Ev_*^+}$ を含む対蹠集合の系列の構成 $(\boldsymbol{m} \geq \mathbf{1})$

$$\boldsymbol{Ev_{8m}^+} \subset \boldsymbol{Ev_{8m}^{+(l_1,l_2)}} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{4m}},$$

$$\boldsymbol{Ev_{8m+2}^+} \subset \boldsymbol{Ev_{8m+2}^{+l}} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{4m+1}},$$

$$\boldsymbol{Ev_{8m+4}^+} \subset \boldsymbol{Ev_{8m+4}^{+(l_1,l_2)}} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{4m+2}},$$

$$\boldsymbol{Ev_{8m+6}^+} \subset \boldsymbol{Ev_{8m+6}^{+l}} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\boldsymbol{4m+3}}.$$

これら対蹠集合の系列：現在調査中

前ページの系列の特別な場合

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Ev}_{\mathbf{10}}^{+} &= \boldsymbol{Ev}_{\mathbf{10}} \cup \boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{10}) \times \{\{\mathbf{11},\mathbf{12},\mathbf{13}\}\},\\
\boldsymbol{Ev}_{\mathbf{10}}^{+\mathbf{2}} &= \boldsymbol{Ev}_{\mathbf{10}} \cup \boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{10}) \times (\boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{4}) + \mathbf{10}) \times \{\{\mathbf{15}\}\},\\
\boldsymbol{Ev}_{\mathbf{10}}^{+\mathbf{3}} &= \boldsymbol{Ev}_{\mathbf{10}} \cup \boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{10}) \times (\boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{6}) + \mathbf{10}) \times \{\{\mathbf{17}\}\},\\
&\vdots\\
\boldsymbol{Ev}_{\mathbf{10}}^{+\boldsymbol{l}} &= \boldsymbol{Ev}_{\mathbf{10}} \cup \boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{10}) \times (\boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{2}\boldsymbol{l}) + \mathbf{10}) \times \{\{\mathbf{2}\boldsymbol{l} + \mathbf{11}\}\}.
\end{aligned}
$$

真に含む対蹠集合は存在しない

$$\boldsymbol{Ev_2} = \{\{1\}\} \subset \binom{[\boldsymbol{n}]}{\mathbf{1}},$$

$$\boldsymbol{Ev_6^+} \subset \binom{[\mathbf{7}]}{\mathbf{3}} : \textbf{Fano 平面.}$$