コンパクト対称空間の極大対蹠集合

Maximal antipodal sets of compact symmetric spaces

田崎博之
(筑波大学)

田中真紀子さんとの共同研究

カンドルと対称空間

2021年11月25日

定義 (Chen-Nagano 1988)

M : **コンパクト** Riemann **対称空間**

s_x : $x \in M$ **における点対称**

$S \subset M$: **対蹠集合**

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ **任意の** $x, y \in S$ **について** $s_x(y) = y$

$\#_2 M = \max\{|A| \mid A :$ **対蹠集合** $\subset M\}$

A : **大対蹠集合** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} |A| = \#_2 M$

A : **極大対蹠集合**

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 「$A \subset A'$: **対蹠集合** $\Rightarrow A = A'$」

大対蹠集合 $\Rightarrow$ **極大対蹠集合**

極大対蹠集合 $\not\Rightarrow$ **大対蹠集合 (一般には)**

写像 $f : X \to X$ に対して

$F(f, X) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$

$o \in M$, $F(s_o, M)$ の各連結成分：極地

一点から成る極地：極

極地：全測地的部分多様体 (対称空間)

$o \in A$：対蹠集合 $\Rightarrow A \subset F(s_o, M)$

o の極 p に対して

　$C(o, p)$:o と p を結ぶ測地線の中点全体

$C(o, p)$：中心体

$C(o, p)$ の各連結成分：中心小体

中心小体：全測地的部分多様体 (対称空間)

対称 R 空間の大対蹠集合とトポロジーの関連性

：成果がある

一般のコンパクト対称空間の極大対蹠集合

：情報があまりない

極地、中心小体：イソトロピー部分群の軌道

極地、中心小体に関する情報

$>$ 対蹠集合に関する情報

極地、中心小体を利用して対蹠集合を研究する

対称 R 空間の大対蹠集合の例

$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}^n(\boldsymbol{r})$ $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{S}^n(\boldsymbol{r})) = \{\pm \boldsymbol{x}\}$

$\{\pm \boldsymbol{x}\}$ ： $\boldsymbol{S}^n(\boldsymbol{r})$ の大対蹠集合

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P}^n(\mathbb{K})$ ： 射影空間

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{P}^n(\mathbb{K})) = \{\boldsymbol{x}\} \cup \boldsymbol{P}^{n-1}(\mathbb{K})$

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{n+1}$ ： $\mathbb{K}^{n+1}$ の正規直交 $\mathbb{K}$ 基底

$\{\mathbb{K}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \mathbb{K}\boldsymbol{e}_{n+1}\}$ ： $\boldsymbol{P}^n(\mathbb{K})$ の大対蹠集合

コンパクト Lie 群の場合

両側不変 Riemann 計量 $\to$ 対称空間

点対称 $s_x(y) = xy^{-1}x$: 代数的記述

コンパクト Lie 群を対称空間として考えることにより、その代数的構造を幾何学的観点から調べることができる。

G：コンパクト Lie 群、 e：単位元

A：e を含む極大対蹠集合

$\Rightarrow A$：可換部分群

e 以外の A の各元の位数は 2

$\Rightarrow A \cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$

2 を一般の素数 p に変えた部分群の研究

：Borel-Serre 1953

$p = 2$ の場合に限って対称空間に一般化

：Chen-Nagano 1988

古典型コンパクト対称空間の
極大対蹠集合の分類の方針
古典型コンパクト Lie 群
　分類結果の具体的記述に後で言及
古典型コンパクト Lie 群内に中心小体、
極地として実現できるもの
　古典型コンパクト Lie 群の極大対蹠部分群
　の分類を利用して、それらとの共通部分と
　して極大対蹠集合を記述

スピン群、セミスピン群、有向実 Grassmann
多様体を除けば、上記の方針を適用できる

極大対蹠集合の分類結果を記述するための記号

$$\Delta_n : \text{対角線に} \pm 1 \text{が並ぶ対角行列} \subset O(n).$$

$$I_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D[4] = \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} : \text{二面体群}$$

自然数 n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の冪と奇数の積に分解する。
$0 \leq s \leq k$ に対して

$$D(s, n) = \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \mid d_i \in D[4]\ (1 \leq i \leq s), d_0 \in \Delta_{n/2^s}\}$$

と定める。

たとえば

$$\boldsymbol{J_1 \otimes d_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{d_0} \\ \boldsymbol{d_0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{I_1 \otimes K_1 \otimes d_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\boldsymbol{d_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{d_0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{d_0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{d_0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{d \in D(s,n)}$ は $\boldsymbol{d^2 = \pm 1_n}$ を満たす。

$$\boldsymbol{PD(s,n) = \{d \in D(s,n) \mid d^2 = 1_n\}},$$

$$\boldsymbol{ND(s,n) = \{d \in D(s,n) \mid d^2 = -1_n\}}$$

ユニタリ群に関連したコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類結果

定理 $U(n)$ の極大対蹠部分群は Δ_n に共役

μ : 自然数　$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$: 自然な射影
θ : 1 の原始 2μ 乗根
n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の冪と奇数の積に分解

定理 $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) n または μ が奇数のとき、$\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$.

(2) n と μ がともに偶数のとき、
$\pi_n(\{1, \theta\}D(s, n)) \quad (0 \leq s \leq k)$,
ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外.

G : コンパクト Lie 群

M : G の極地

$\{B_i\}$: G の極大対蹠部分群の分類結果

$\Rightarrow \{M \cap B_i\}$: M の極大対蹠集合

の分類結果の候補

各 $M \cap B_i$ が M の極大対蹠集合か

どうか確認

$1 \leq k \leq n-1$

$G_k(\mathbb{C}^n)$: $\mathbb{C}^n$ 内の k 次元複素部分空間全体

$G_k(\mathbb{C}^n) \ni V \mapsto 1_V - 1_{V^\perp} \in U(n)$: 像は極地

定理 $G_k(\mathbb{C}^n)$ の極大対蹠集合は

$G_k(\mathbb{C}^n) \cap \Delta_n$

$= \{\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$

に合同.

ただし、$e_1, \dots, e_n$ は $\mathbb{C}^n$ の標準的ユニタリ基底.

$U(2m)^* = U(2m)/\{\pm 1_{2m}\}$ 内で
$G_m(\mathbb{C}^{2m})^* = G_m(\mathbb{C}^{2m})/\{\pm 1_{2m}\}$ は極地
$U(2m)^*$ の極大対蹠部分群の分類を利用

定理 商空間 $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $U(2m)^*$ 合同

$$\begin{aligned}\pi_{2m}(\{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s, 2m) \mid \\ \exists d_i\ (0 \le i \le s)\ \mathrm{Tr} d_i = 0\} \\ \cup \sqrt{-1} ND(s, 2m)) \qquad (0 \le s \le k),\end{aligned}$$

ただし、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外、$m = 2$ のときは $\pi_4(\{d_0 \in PD(0,4) \mid \mathrm{Tr} d_0 = 0\})$ も除外.

$U(n)$ の対合的自己同型写像 σ_I ：

$$\sigma_I(g) = \bar{g} \qquad (g \in U(n))$$

$$UI(n) = \{g \in U(n) \mid \sigma_I(g) = g^{-1}\} \cong U(n)/O(n)$$

これは連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない

半直積 $U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle = (U(n), 1) \cup (U(n), \sigma_I)$

：連結成分への分解

$\hat{e}$: $U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ の単位元

$$F(s_{\hat{e}}, U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle) = \bigcup_{0 \le r \le n} (G_r(\mathbb{C}^n), 1) \cup (UI(n), \sigma_I)$$

定理 $U(n) \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ の極大対蹠部分群は $\Delta_n \rtimes \langle\sigma_I\rangle$ に共役

定理 $UI(n)$ の極大対蹠集合は Δ_n に合同

G：連結コンパクト Lie 群

T：G の極大トーラス　$G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$

σ：G の対合的自己同型写像

T'：σ の不動点部分群の極大トーラス

半直積 $G \rtimes \langle \sigma \rangle$ において

$$(G, \sigma) = \bigcup_{g \in G} g(T', \sigma)g^{-1}$$

Hermann 作用の応用例

これにより、(G, σ) における極地を求められる

簡単な例：$O(2) = SO(2) \cup \bigcup_{g \in SO(2)} g \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} g^{-1}$

μ : 自然数　$\pi : U(n) \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle \to U(n) \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle / \mathbb{Z}_\mu$

θ : 1 の原始 2μ 乗根

n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の冪と奇数の積に分解

定理 $U(n) \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle / \mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) μ が奇数のとき、$\pi_n(\Delta_n \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle)$.

(2) μ が偶数のとき、$\pi_n(\{1, \theta\} D(s, n) \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle)$ $(0 \leq s \leq k)$. ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外

$(\boldsymbol{UI(n)}, \boldsymbol{\sigma_I}) \subset \boldsymbol{U(n)} \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle$ より
$(\boldsymbol{UI(n)}/\mathbb{Z}_\mu, \boldsymbol{\sigma_I}) \subset \boldsymbol{U(n)} \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle/\mathbb{Z}_\mu$ が定まる
これは連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない
$\boldsymbol{U(n)} \rtimes \langle \boldsymbol{\sigma_I} \rangle/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群の分類を利用して次を得る

定理 $UI(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同

(1) μ が奇数の場合、$\pi_n(\Delta_n)$.

(2) μ が偶数の場合、$\pi_n(\{1, \theta\}PD(s, n))$. ただし、$0 \le s \le k$ であり、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

$J_n = J_1 \otimes 1_n \in SO(2n)$

$U(2n)$ の対合的自己同型写像 σ_{II} ：

$$\sigma_{II}(g) = J_n \bar{g} J_n^{-1} \qquad (g \in U(2n))$$

$$UII(n) = \{g \in U(2n) \mid \sigma_{II}(g) = g^{-1}\} \cong U(2n)/Sp(n)$$

これは連結コンパクト Lie 群の極地として実現できない

半直積 $U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle = (U(2n), 1) \cup (U(2n), \sigma_{II})$

：連結成分への分解

$\hat{e}$: $U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ の単位元

$$F(s_{\hat{e}}, U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle)$$

$$= \bigcup_{0 \le r \le 2n} (G_r(\mathbb{C}^{2n}), 1) \cup (UII(n), \sigma_{II})$$

定理 $U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ **の極大対蹠部分群は** $(\Delta_{2n}, 1)$ **または** $(1_2 \otimes \Delta_n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle$ **に共役**

定理 $UII(n)$ **の極大対蹠集合は** $1_2 \otimes \Delta_n$ **に合同**

$$E(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, d_1, d_2 \in \Delta_n \right\} \subset O(2n).$$

$n = 2^k \cdot l \quad \theta : 1$ の原始 2μ 乗根

定理 $(U(2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) μ が奇数の場合

$$\pi_{2n}(\Delta_{2n}, 1), \quad \pi_{2n}((1_2 \otimes \Delta_n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle).$$

(2) μ が偶数の場合

$$\pi_{2n}((\{1, \theta\}\Delta_{2n}, 1) \cup (\{1, \theta\}E(n), \sigma_{II})),$$

$$\pi_{2n}(\{1, \theta\}D(s+1, 2n) \rtimes \langle \sigma_{II} \rangle) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

定理 $UII(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠集合は次のいずれかに合同

(1) μ が奇数の場合、$\pi_{2n}(1_2 \otimes \Delta_n)$.

(2) μ が偶数の場合、

$$\pi_{2n}(\{1,\theta\}(1_2 \otimes PD(s,n) \cup \{I_1, J_1, K_1\} \otimes ND(s,n)))$$

ただし、$0 \leq s \leq k$ であり、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

コンパクト対称空間をコンパクト Lie 群に埋め込む方法で研究を進め、多くのコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類が完了している