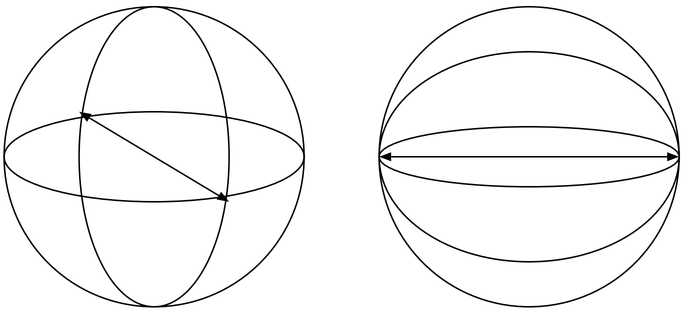
The intersection of two real forms in the complex hyperquadric

田崎博之
筑波大学大学院数理物質科学研究科
tasaki@math.tsukuba.ac.jp

複素二次超曲面の二つの実形と呼ばれるある種の全測地的 Lagrange 部分多様体の交叉が対蹠集合 (antipodal set) であることを示す。その系として、複素二次超曲面の任意の実形は大域的タイトになることがわかる。本講演の内容は [11] に基づいている。

1 導入

最も簡単な場合の紹介から話を始める。一次元複素二次超曲面は、複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ であり、その実形は大円である。$\mathbb{C}P^1$ 内の異なる二つの大円は二点で交わり、交点は対蹠点の対になっている。



この現象の一般化がすべての複素二次超曲面についても成り立つことを示すのが、この講演の目的である。その結果から、複素二次超曲面内の二つの実形の交点数もわかる。これは、交叉積分公式を定式化するために必要なことであり、このことはこの研究を始めた動機の一つである。また、実形は Lagrange 部分多様体になっていて、交点数がわかるだけではなく、二つの Lagrange 部分多様体の交叉の形が対蹠集合になるということ自身、私にとっては興味深い現象である。今回の講演では複素二次超曲面の場合について得られた結果を紹介するが、他のコンパクト

型 Hermite 対称空間についても同様の結果が得られることをを期待して、東京理科大の田中さんと共同で研究を進めている。

2　主結果と関連事項

$\bar{M}$ を Hermite 多様体とする。$\bar{M}$ の部分多様体 M が次の条件を満たすとき、M を $\bar{M}$ の**実形**と呼ぶ。ある対合的反正則等長変換 $\sigma : \bar{M} \to \bar{M}$ が存在し

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

が成り立つ。実形 M は $\bar{M}$ の全測地的 Lagrange 部分多様体になる。

基本的な Hermite 多様体の実形の例を挙げておく。複素 Euclid 空間 $\mathbb{C}^n$ 内の自然に埋め込まれた実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ は実形である。さらに、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内の自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ も実形である。

複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ は

$$Q_n(\mathbb{C}) = \{[z_1, \dots, z_{n+2}] \in \mathbb{C}P^{n+1} \mid z_1^2 + \cdots + z_{n+2}^2 = 0\}$$

によって定義され、複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n+1}$ の標準的 Kähler 構造は $Q_n(\mathbb{C})$ の Kähler 構造を誘導する。$Q_n(\mathbb{C})$ はコンパクト型 Hermite 対称空間 $SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$ と正則等長的になる。さらに、これは $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の向きの付いた 2 次元線形部分空間全体の成す Grassmann 多様体 $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ であり、自然に $\wedge^2\mathbb{R}^{n+2}$ 内の部分多様体とみなすことができる。$\mathbb{R}^{n+2}$ の正規直交基底 $u_1, u_2, e_1, \dots, e_n$ をとる。$0 \leq k \leq n$ に対して、$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の部分多様体 $S^{k,n-k}$ を

$$S^{k,n-k} = S^k(\mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_k) \wedge S^{n-k}(\mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}e_{k+1} + \cdots + \mathbb{R}e_n)$$

によって定める。ここで、$S^m(V)$ は $m+1$ 次元実 Euclid 空間 V 内の m 次元単位超球面である。$S^{k,n-k}$ は $(S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$ に等長的になる。竹内 [9] はコンパクト型 Hermite 対称空間内の実形を分類している。$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の二つの部分多様体は、$SO(n+2)$ の作用で写り合うときに、**合同**という。竹内の分類結果より、$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の実形は

$$S^{k,n-k} \quad (0 \leq k \leq [n/2])$$

のいずれかと合同になる。これは、Chen と長野 [1] による $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の全測地的部分多様体の分類結果からもわかる。

Riemann 対称空間 M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。S のすべての点 x に対して、点対称 s_x は S のすべての点を固定する。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。これらの概念は Chen と長野 [2] が導入した。

対蹠集合と 2-number に関する例を挙げておこう。n 次元球面 S^n の点 $x \in S^n$ をとると、x における点対称 s_x の不動点は x と $-x$ だけなので、$\{x, -x\}$ は極大な対

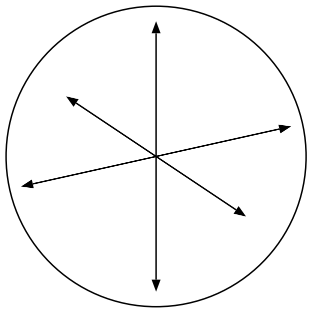
蹠集合になる。したがって、$\#_2 S^n = 2$ が成り立つ。次に実射影平面 $\mathbb{R}P^2$ について考えよう。$\mathbb{R}P^2$ は $\mathbb{R}^3$ 内の 1 次元部分空間全体とみなす。$\mathbb{R}^3$ 内の単位ベクトル e_1 の張る 1 次元部分空間を $p_1 = \mathbb{R}e_1 \in \mathbb{R}P^2$ と書くと点対称 s_{p_1} は $1_{p_1} - 1_{p_1^\perp}$ から誘導され、その不動点集合は

$$F(\mathbb{R}P^2, s_{p_1}) = \{q \in \mathbb{R}P^2 \mid q = p_1 \text{ or } q \subset p_1^\perp\}$$

になる。$p_2 \in F(\mathbb{R}P^2, s_{p_1}) - \{p_1\}$ をとり、単位ベクトル e_2 によって $p_2 = \mathbb{R}e_2$ と表す。さらに e_1, e_2, e_3 が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底になるように e_3 をとり $p_3 = \mathbb{R}e_3$ とおくと、

$$\{p_1, p_2, p_3\} = \{\mathbb{R}e_1, \mathbb{R}e_2, \mathbb{R}e_3\}$$

は $\mathbb{R}P^2$ の対蹠集合になり、$\#_2 \mathbb{R}P^2 = 3$ がわかる。下図の対蹠点になる二点を同一視したものが $\mathbb{R}P^2$ であり、矢印は $\mathbb{R}e_1, \mathbb{R}e_2, \mathbb{R}e_3$ を表している。



同様に、$\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_{n+1}$ をとると、

$$\{\mathbb{R}e_1, \ldots, \mathbb{R}e_{n+1}\}$$

は $\mathbb{R}P^n$ の対蹠集合になり、$\#_2 \mathbb{R}P^n = n + 1$ がわかる。さらに同様の考察によって、$\mathbb{C}^{n+1}$ のユニタリ基底 $e_1, \ldots, e_{n+1}$ をとると、

$$\{\mathbb{C}e_1, \ldots, \mathbb{C}e_{n+1}\}$$

は $\mathbb{C}P^n$ の対蹠集合になり、$\#_2 \mathbb{C}P^n = n + 1$ がわかる。これらの例のように、対蹠集合の概念は線形代数における正規直交系の幾何学的拡張とみることができる。他の古典型コンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合もある線形空間の正規直交系と密接に関係している。

竹内 [10] は、M が対称 R 空間ならば

$$\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2), \tag{2.1}$$

が成り立つことを証明した。ここで、$H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ は M の係数 $\mathbb{Z}_2$ のホモロジー群である。竹内 [9] はコンパクト型 Hermite 対称空間の実形は対称 R 空間であることも示している。

定理 2.1 k と l を $0 \leq k \leq l \leq [n/2]$ を満たす整数とする。L_1 を $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の $S^{k,n-k}$ と合同な実形とし、L_2 を $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ 内の $S^{l,n-l}$ と合同な実形とする。L_1 と L_2 が横断的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は

$$\{\pm u_1 \wedge u_2, \pm e_1 \wedge e_2, \ldots, \pm e_{2k-1} \wedge e_{2k}\}$$

と合同になる。特に、$L_1 \cap L_2$ は L_1 の極大な対蹠集合になり、その元の個数は $\#_2 L_1 = 2k+2$ に一致する。さらに、$k = l = [n/2]$ ならば、その元の個数は $\#_2 \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) = 2[n/2]+2$ に一致する。

注意 2.2 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ の任意の実形は、自然に埋め込まれた実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と合同になる。Howard[4] は、$\mathbb{C}P^n$ の実形 L_1 と L_2 が横断的に交わるならば $\#(L_1 \cap L_2) = n+1$ が成り立つことを示している。その証明をよく読むと本質的に次の主張を示していることがわかる。$\mathbb{C}^{n+1}$ のユニタリ基底 $u_1, \ldots, u_{n+1}$ が存在し、

$$L_1 \cap L_2 = \{\mathbb{C}u_1, \ldots, \mathbb{C}u_{n+1}\}$$

が成り立つ。特に、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2、さらに $\mathbb{C}P^n$ の極大な対蹠集合になり、その元の個数は $\#_2\mathbb{R}P^n = \#_2\mathbb{C}P^n = n+1$ に一致する。このように、定理 2.1 はこの主張の一般化になっている。

Hermite 対称空間 M の Lagrange 部分多様体 L が次の条件を満たすとき、L を**大域的タイト**という (Oh[7])。L が $g \cdot L$ に横断的に交わるような M の任意の等長変換 g に対して

$$\#(L \cap g \cdot L) = \dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ。注意 2.2 より、$\mathbb{C}P^n$ の実形は大域的タイトになることがわかる。さらに、定理 2.1 において $k = l$ の場合を考えると、(2.1) より次の系が従う。

系 2.3 複素二次超曲面の任意の実形は大域的タイト Lagrange 部分多様体である。

注意 2.4 $Q_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1 = S^2$ であり、この実形である大円が大域的タイトであることはよく知られている。$Q_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 = S^2 \times S^2$ であり、この実形 $S^{0,2}$ と $S^{1,1}$ は大域的タイトになることを、入江と酒井 [5] は Howard[4] の示した Poincaré の公式に基づいた積分幾何学の手法で示している。最近彼ら [6] は積分幾何学の同様の手法で $Q_n(\mathbb{C})$ 内の $S^{0,n}$ と $S^{1,n-1}$ も大域的タイトになることを示した。

3 主結果の証明の概要

Frankel[3] の手法を利用して次の補題を得る。

補題 3.1 M を正の正則断面曲率を持つコンパクト Kähler 多様体とする。このとき、M の全測地的コンパクト Lagrange 部分多様体 L_1, L_2 に対して、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

Frankel の定理は正の断面曲率を持つコンパクト Riemann 多様体 X 内のコンパクト全測地的部分多様体 Y_1, Y_2 が $\dim Y_1 + \dim Y_2 \geq \dim X$ を満たすならば、$Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ であることを主張している。証明の方針は次のとおり。$Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ と仮定する。Y_1 と Y_2 を最短測地線で結ぶと、その長さの第一変分は 0 になり、断面曲率が正であることから第二変分は負になる。これは最短性に矛盾するので、$Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$ が成り立つことがわかる。補題 3.1 の場合は、同様に $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ と仮定すると、正則断面曲率が正であることから Frankel の定理と同様の考察によって矛盾を生じる。よって、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ が成り立つことがわかる。

$o = u_1 \wedge u_2$ を $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の原点とする。$z = x_1 \wedge x_2 \in \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ に対して $\bar{z} = -x_1 \wedge x_2$ と書くことにする。Chen と長野 [1] の結果より, $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の o における点対称 s_o の不動点集合は

$$
\begin{aligned}
F(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), s_o) &= \{\pm u_1 \wedge u_2\} \cup \tilde{G}_2(\mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_n) \\
&= \{o, \bar{o}\} \cup \tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

になる。これは、o の生成する $\mathbb{R}^{n+2}$ 内の 2 次元部分空間上恒等変換であり、その直交補空間上恒等変換の -1 になる $\mathbb{R}^{n+2}$ の等長的線形変換が s_o を誘導することからわかる。

補題 3.2 L を o を通る $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の実形とする。L が $S^{0,n}$ と合同ならば、

$$L \cap F(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), s_o) = \{o, \bar{o}\}$$

が成り立つ。L が $S^{k,n-k}$ $(1 \leq k \leq [n/2])$ と合同ならば、

$$L \cap F(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), s_o) = \{o, \bar{o}\} \cup L'$$

が成り立つ。ここで、L' は $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)$ 内の $S^{k-1,n-k-1}$ と合同な実形である。

コンパクト Riemann 多様体 X と $p \in X$ に対して、X の p における最小軌跡を $C_p(X)$ で表し、接最小軌跡を $\tilde{C}_p(X)$ で表す。コンパクト対称空間の最小軌跡に関する酒井 [8] の結果から次の補題を得る。

補題 3.3 o を通る $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の実形 L に対して

$$\tilde{C}_o(L) = T_oL \cap \tilde{C}_o(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})).$$

特に、L 内の最短測地線は $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ においても最短になる。

補題 3.4 o を通る $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の二つの実形 L_1 と L_2 が横断的に交わるならば、

$$L_1 \cap L_2 \subset F(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), s_o).$$

証明の概略

$$L_1 \cap L_2 - \{o\} \subset C_o(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}))$$

が成り立つことを示す。もし、$x \notin C_o(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}))$ を満たす $x \in L_1 \cap L_2 - \{o\}$ が存在すると、補題 3.3 より $x \notin C_o(L_i)$ $(i = 1, 2)$ が成り立つ。よって、L_i 内の最短測地線 c_i によって o と x を結ぶことができる。補題 3.3 より、c_1 と c_2 は $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ においても最短測地線になり、$c_1 = c_2$ が成り立つ。これは L_1 と L_2 が横断的に交わるという仮定に矛盾する。

$\bar{o}$ についても同様の包含関係が成り立ち、

$$L_1 \cap L_2 - \{o, \bar{o}\} \subset C_o(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})) \cap C_{\bar{o}}(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})).$$

$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の最小軌跡を酒井 [8] の結果を使って調べると

$$C_o(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})) \cap C_{\bar{o}}(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})) = \tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)$$

がわかるので、補題の主張を示すことができる。

定理 2.1 の証明の概略　補題 3.1 より $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ となる。そこで、$o \in L_1 \cap L_2$ とする。定理の最初の主張を k に関する帰納法で証明する。$k = 0$ のときは、補題 3.2 と 3.4 より $L_1 \cap L_2 = \{o, \bar{o}\}$ が成り立つ。$1 \leq k \leq [n/2]$ の場合は、補題 3.2 を使って帰納的に証明できる。

Chen と長野 [2] の結果より、$\#_2 S^{k,n-k} = 2k + 2$ と $\#_2 \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) = 2[n/2] + 2$ が成り立つ。これらより、定理の後半の主張を得る。

4　その後の進展

その後、東京理科大の田中さんと共同で得た結果を追加しておく。

定理 4.1 M をコンパクト既約 Hermite 対称空間とする。M の二つの実形 L_1, L_2 が横断的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

さらに M が複素 Grassmann 多様体の場合には、横断的に交わる実形 L_1, L_2 に対して

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$$

が成り立つことが、実形の二つの合同類の系列についてわかった。これは定理 2.1 の拡張になっている。

参考文献

[1] Chen, B.-Y., Nagano, T.: Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, Duke Math. J. 44, 745–755 (1977)

[2] Chen, B.-Y., Nagano, T.: A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., 308, 273–297 (1988)

[3] Frankel, T.: Manifolds with positive curvature, Pacific J. Math. 11, 165–174 (1961)

[4] Howard, R.: The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106**, (1993).

[5] Iriyeh, H., Sakai, T.: Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, Geom. Dedicata (2009) doi:10.1007/s10711-009-9398-6

[6] Iriyeh, H., Sakai, T.: Global tightness of certain real forms in complex hyperquadrics, Tokyo Metropolitan University, Mathematics and Information Sciences, Preprint Series, 2009: No. 2.

[7] Oh, Y.-G.: Tight Lagrangian submanifolds in $C\mathrm{P}^n$, Math. Z. 207, 409–416 (1991)

[8] Sakai, T.: On cut loci of compact symmetric spaces, Hokkaido Math. J. 6, 136–161 (1977)

[9] Takeuchi, M.: Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. J., (2) 36, 293–314 (1984)

[10] Takeuchi, M.: Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J., 115, 43–46 (1989)

[11] Tasaki, H.: The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, preprint.