The intersection of two real forms in the complex hyperquadric

東京理科大学研究集会

田崎博之

筑波大学数理物質科学研究科

2009 年 9 月 7 日

実形、複素二次超曲面

対蹠集合と 2-number

主結果 (実形の交叉は対蹠集合)

大域的タイト

主結果の証明の概略

- コンパクト対称空間
  - 点対称の不動点集合
  - 最小軌跡

1. 主結果と関連事項

$\bar{M}$: Hermite 多様体

M : $\bar{M}$ の部分多様体

M : $\bar{M}$ の実形

$\exists$ 対合的反正則等長変換 $\sigma : \bar{M} \to \bar{M}$

$$M = \{x \in \bar{M} \mid \sigma(x) = x\}$$

複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$

$$\left\{[z_i] \in \mathbb{C}P^{n+1} \,\middle|\, z_1^2 + \cdots + z_{n+2}^2 = 0\right\}$$

$$Q_n(\mathbb{C}) = SO(n+2)/SO(2) \times SO(n)$$
$$= \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \subset \wedge^2 \mathbb{R}^{n+2}$$

$u_1, u_2, e_1, \ldots, e_n$: $\mathbb{R}^{n+2}$ の正規直交基底

$0 \leq k \leq n$ に対して、実形 $S^{k,n-k}$ を定める

$$S^{k,n-k} := S^k(\mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_k)$$
$$\wedge S^{n-k}(\mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}e_{k+1} + \cdots + \mathbb{R}e_n)$$
$$\subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$$

$S^m(V)$ ： m 次元単位超球面

$$S^{k,n-k} = (S^k \times S^{n-k})/\mathbb{Z}_2$$

$M_1, M_2 \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$

M_1, M_2 : 合同

$\Leftrightarrow$ $SO(n+2)$ の作用で写り合う

$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の実形は

$$S^{k,n-k} \quad (0 \leq k \leq [n/2])$$

のいずれかと合同

M : Riemann対称空間

$S \subset M$: **対蹠集合**

$\Leftrightarrow$ 任意の$x, y \in S$に対して、$s_x y = y$

$\#_2 M = \sup\{\#S \mid S$は対蹠集合$\}$

$\#_2 M$: Mの**2-number**

Mが対称R空間

$\Rightarrow \#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$

コンパクト型Hermite対称空間の実形

: 対称R空間

定理 1.1(主結果) $\quad 0 \leq k \leq l \leq [n/2]$

L_1 : $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の $S^{k,n-k}$ と合同な実形

L_2 : $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の $S^{l,n-l}$ と合同な実形

L_1 と L_2 は横断的に交わる

このとき、$L_1 \cap L_2$ は次と合同

$$\{\pm u_1 \wedge u_2, \pm e_1 \wedge e_2, \ldots, \pm e_{2k-1} \wedge e_{2k}\}$$

$L_1 \cap L_2$ は L_1 の極大な対蹠集合

$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = 2k + 2$

$k = l = [n/2]$ ならば、

$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) = 2[n/2] + 2$

複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$

任意の実形は実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ と合同

実形 L_1 と L_2 が横断的に交わるならば、

$\exists u_1, \ldots, u_{n+1}$: $\mathbb{C}^{n+1}$ のユニタリ基底

$$L_1 \cap L_2 = \{\mathbb{C}u_1, \ldots, \mathbb{C}u_{n+1}\}$$

$L_1 \cap L_2$: $\mathbb{C}P^n$ の極大な対蹠集合

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 \mathbb{R}P^n = \#_2 \mathbb{C}P^n = n + 1$$

定理 1.1 はこの結果の拡張になっている

M : Hermite 対称空間

L : M の Lagrange 部分多様体

L : 大域的タイト

$\Leftrightarrow$ L が $g \cdot L$ に横断的に交わる等長変換 g

$$\#(L \cap g \cdot L) = \dim H_*(L, \mathbb{Z}_2)$$

定理 1.1 において $k = l$ の場合

$Q_n(\mathbb{C})$ の任意の実形は大域的タイト

$S^{0,2}, S^{1,1} \subset Q_2(\mathbb{C}),\ S^{0,n}, S^{1,n-1} \subset Q_n(\mathbb{C})$

: 大域的タイト (入江、酒井)

2. 主結果の証明の概要

補題 2.1

M ： コンパクトKähler多様体、

正則断面曲率 > 0

L_1, L_2 ： M の全測地的コンパクト

Lagrange部分多様体

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Frankelの定理と同様の証明法

$o = u_1 \wedge u_2$: $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の原点

$z = x_1 \wedge x_2 \in \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ に対して

$\bar{z} = -x_1 \wedge x_2$ と書く

$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の点対称の不動点集合

$$
\begin{aligned}
&F(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), s_o) \\
&= \{o, \bar{o}\} \cup \tilde{G}_2(\mathbb{R}e_1 + \cdots + \mathbb{R}e_n) \\
&= \{o, \bar{o}\} \cup \tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}
$$

補題 2.2

L : o を通る $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の実形

L : $S^{0,n}$ と合同

$\Rightarrow L \cap F(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), s_o) = \{o, \bar{o}\}$

L : $S^{k,n-k}$ $(1 \leq k \leq [n/2])$ と合同

$\Rightarrow L \cap F(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), s_o) = \{o, \bar{o}\} \cup L'$

L' : $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n})$ 内で $S^{k-1,n-k-1}$ と合同

X：コンパクト$\mathrm{Riemann}$多様体

$p \in X$

$C_p(X)$：Xのpにおける最小軌跡

$\tilde{C}_p(X)$：接最小軌跡

補題 2.3

L：oを通る$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$の実形

$\Rightarrow \tilde{C}_o(L) = T_oL \cap \tilde{C}_o(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}))$

L内の最短測地線は$\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$でも最短

コンパクト対称空間の最小軌跡に関する酒井の結果を利用

補題 2.4

L_1, L_2 : o を通る $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ の二つの実形、横断的に交わる

$\Rightarrow L_1 \cap L_2 \subset F(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}), s_o)$

横断的に交わる、補題 2.3 より

$$L_1 \cap L_2 - \{o\} \subset C_o(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}))$$

$$L_1 \cap L_2 - \{\bar{o}\} \subset C_{\bar{o}}(\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}))$$

これより $L_1 \cap L_2 - \{o, \bar{o}\} \subset \tilde{G}_2(\mathbb{R}^n)$

定理 1.1 の証明の概略

補題 2.1 より、$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

$o \in L_1 \cap L_2$ とする

k に関する帰納法で証明

$k = 0$ のとき、$L_1 \cap L_2 = \{o, \bar{o}\}$

$1 \leq k \leq [n/2]$ のとき、補題 2.2 より

帰納的に前半の主張を証明できる

後半の主張は $\#_2 S^{k,n-k} = 2k + 2$

$\#_2 \tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) = 2[n/2] + 2$ より