対蹠集合とその応用

田崎博之

tasaki@math.tsukuba.ac.jp

2009年のこの研究集会で複素二次超曲面の二つの実形の交叉 ([7]) について講演した。その後、田中真紀子さんとの共同研究でコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉に関する結果 ([5]) に拡張し、対称 R 空間の対蹠集合の性質を調べる ([6]) ことで、二つの実形の交叉に関する結果の一部を精密化できた。さらに入江博さんと酒井高司さんとの共同研究でこれらの結果を利用してコンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形に関する Floer ホモロジーを求めた ([2])。今回の講演ではこれらの結果について全体的な解説をする。

1 対蹠集合

Riemann 対称空間 M の点 x における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。すべての $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ が成り立つ。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。$\#_2 M$ は有限の値になることがわかる。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen と長野 [1] が導入した。

2 対称 R 空間の対蹠集合

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道が Riemann 対称空間になるとき、これを**対称 R 空間**と呼ぶ。竹内 [4] は、M が対称 R 空間ならば $\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$, が成り立つことを証明した。ここで、$H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ は M の係数 $\mathbb{Z}_2$ のホモロジー群である。

$\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とする。$\mathfrak{g}$ には G 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定めておく。$J \in \mathfrak{g}, J \neq 0$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ を満たす元とする。J を通る G 軌道はコンパクト型 Hermite 対称空間になることが知られている。逆に任意のコンパクト型 Hermite 対称空間はこのようにして得られる。

定理 2.1 (Sánchez[3], [6]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。$X \in M$ における M の点対称を s_X で表す。$X, Y \in M$ に対して $s_X(Y) = Y$ の必要十分条件は、$[X, Y] = 0$ である。さらに以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

M の等長変換全体の単位連結成分の元で写り合う部分集合を合同という。大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ 内の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ によって $M \cap \mathfrak{t}$ という形に表現される。特に大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の軌道になる。

定理 2.2 ([6]) $\tau : M \to M$ をコンパクト型 Hermite 対称空間 M の対合的反正則等長変換とし、τ の不動点集合として M の実形 L が定まっているとする。

$$I_\tau : G \to G\ ;\ g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

によって、G の自己同型 I_τ を定める。L は J を含むと仮定する。I_τ から定まる $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$ とする。このとき、$L = M \cap \mathfrak{p}$ が成り立つ。さらに L に対して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

L の大対蹠集合は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ によって $M \cap \mathfrak{a}$ という形に表現される。特に大対蹠集合は I_τ から定まる対称対の Weyl 群の軌道になる。

系 2.3 ([6]) 対称 R 空間の対蹠集合に関して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

$\mathrm{Ad}(SU(4))$ の対蹠集合は性質 (A) を満たさないことがわかる ([6])。

3 二つの実形の交叉

この節の内容はおもに [5] に基づいている。Hermite 多様体の対合的反正則等長変換の不動点集合を**実形**と呼ぶ。

定理 3.1 ([5]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の二つの実形 L_1, L_2 が横断的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

定理 3.2 ([5]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2, L_1', L_2' を M の実形とする。さらに、L_1, L_1' は合同であり、L_2, L_2' も合同であると仮定する。L_1, L_2 が横断的に交わり、L_1', L_2' も横断的に交わるならば、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1' \cap L_2')$ が成り立つ。

系 3.3 ([6]) 定理 3.2 の設定のもとで、さらに $\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2(L_1), \#_2(L_2)\}$ という条件を加えると、$L_1 \cap L_2$ と $L_1' \cap L_2'$ は合同になる。

定理 3.4 ([5]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M の横断的に交わる合同な実形とする。このとき、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

定理 3.5 ([5]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M 内の横断的に交わる二つの実形とする。

(1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり、L_1 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

(2) それ以外の場合、$L_1 \cap L_2$ は 2-number が小さい方の実形の大対蹠集合になり、次の等式が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}.$$

4 Floer ホモロジー

この節の内容はおもに [2] に基づいている。Floer ホモロジーに関する文献については [2] の文献表を参照。

定理 4.1 ([2]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_0, L_1 を M の横断的に交わる実形とする。このとき、L_0, L_1 に関する $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジーは

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

となる。つまり、交叉 $L_0 \cap L_1$ そのものが Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の生成元となる。

Floer ホモロジーのチェインは

$$CF(L_0, L_1) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

によって定まり、その境界作用素 $\partial : CF(L_0, L_1) \to CF(L_0, L_1)$ は

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q$$

で定まる。ここで、$n(p,q)$ は p,q,L_0,L_1 を境界条件にする正則写像の同値類の個数を mod-2 で数えたものである。このとき、$\partial \circ \partial = 0$ が成り立ち、Floer チェイン複体 $(CF(L_0,L_1),\partial)$ が構成され、商加群

$$HF(L_0,L_1:\mathbb{Z}_2) := \ker(\partial)/\mathrm{im}(\partial)$$

が定義できる。これを L_0,L_1 に関する $\mathbb{Z}_2$ 係数 **Floer ホモロジー群**という。

定理 4.1 の設定のもとで、$p \in L_0 \cap L_1$ に対して点対称 s_p は p,q,L_0,L_1 を境界条件にする正則写像の同値類の全体に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用を誘導する。特にその個数は偶数になり $n(p,q)=0$ となる。よって、境界作用素は $\partial = 0$ となって、次の等式を得る。

$$HF(L_0,L_1:\mathbb{Z}_2) = CF(L_0,L_1) = \bigoplus_{p\in L_0\cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

上記議論は Floer ホモロジーが定義できれば適用可能なので、M が既約ではない場合でも同様の結論を得られる。詳細は [2] 参照。

参考文献

[1] Chen, B.-Y., Nagano, T.: A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., 308 (1988), 273–297.

[2] Iriyeh, H., Sakai, T. and Tasaki, H.: Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, arXiv:1108.0260

[3] C. U. Sánchez, The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi's, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 893–900.

[4] Takeuchi, M.: Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J., 115 (1989), 43–46

[5] Tanaka, M. S. and Tasaki, H.: The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, to appear in J. Math. Soc. Japan

[6] Tanaka, M. S. and Tasaki, H.: Antipodal sets of symmetric R-spaces, to appear in Osaka J. Math.

[7] Tasaki, H.: The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. 62 no.3 (2010), 375–382.