対蹠集合とその応用

田崎博之

tasaki@math.tsukuba.ac.jp

題名の対蹠集合はChen-Nagano[2]が導入した概念であり、コンパクトRiemann対称空間の形を大まかに決める枠のようなものと思える。

2009年のこの東京理科大学での研究集会で複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ の二つの実形の交叉が対蹠集合になるという結果 ([11]) について講演した。この研究では、複素二次超曲面 $Q_n(\mathbb{C})$ が有向実Grassmann多様体 $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ に同型であることとChen-Nagano[1]が導入した極地を利用し、さらに $\tilde{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \subset \bigwedge^2 \mathbb{R}^{n+2}$ とみなせることから、二つの実形の交叉を $\bigwedge^2 \mathbb{R}^{n+2}$ の部分集合として具体的に表示した。その結果から二つの実形の交叉が対蹠集合になることがわかった。

複素二次超曲面を含む一般のコンパクト型Hermite対称空間の二つの実形の交叉も同様の性質を持つのではないかと予想した。一般の場合、$\bigwedge^2 \mathbb{R}^{n+2}$ を利用するわけにはいかないが、極地による帰納法の議論は有効であることがその後の田中真紀子さんとの共同研究でわかった。これにより、ほぼ最初の予想通りコンパクト型Hermite対称空間の二つの実形の交叉に関する結果 ([9]) に拡張できた。対称 R 空間の対蹠集合の性質を調べる ([10]) ことで、二つの実形の交叉に関する結果の一部の精密化もできた。

複素二次超曲面の二つの実形の交叉に関する研究を始めたきっかけは、入江博さんと酒井高司さんの論文[4]とこの結果の複素二次超曲面への拡張に関する彼らの話を聞いたことであった。複素二次超曲面を越え、一般のコンパクト型Hermite対称空間に対して二つの実形の交叉が対蹠集合になるという準備が整い、コンパクト型Hermite対称空間の二つの実形に関するFloerホモロジーを彼らとの共同研究で求めることができた ([5])。今回の講演はこれらの結果についての全体的な解説である。

1　対蹠集合

Riemann対称空間 M の点 x における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。すべての $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ が成り立つ。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。$\#_2 M$

は有限の値になることがわかる。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-Nagano[2] が導入した。

いくつかの例を挙げておく。n 次元単位球面

$$S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

の点 x における点対称は $s_x = 1_{\mathbb{R}x} - 1_{x^\perp}$ と表すことができ、この不動点集合は $\{x, -x\}$ になる。よって、これは S^n の大対蹠集合になり、逆に S^n の大対蹠集合は必ずこの形で与えられることもわかる。特に、$\#_2 S^n = 2$ が成り立つ。

$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ のいずれかとして、$\mathbb{K}^{n+r}$ 内の r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体から成る係数体 $\mathbb{K}$ に関する Grassmann 多様体 $G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ について考える。$V \in G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ に関する点対称は $s_V = 1_V - 1_{V^\perp}$ と表すことができ、この不動点集合は V の $\mathbb{K}$ 部分空間と $V^\perp$ の $\mathbb{K}$ 部分空間の直和になる r 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間の全体になる。このことから、$\mathbb{K}^{n+r}$ のユニタリ基底 $e_1, \ldots, e_{n+r}$ に対して

$$\{\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_r} \rangle_{\mathbb{K}} \in G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n + r\}$$

は $G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ の大対蹠集合になり、逆に $G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ の大対蹠集合は必ずこの形で与えられることもわかる。したがって、

$$\#_2 G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) = \binom{n+r}{r}$$

が成り立つ。これは係数体 $\mathbb{K}$ に依存しない。

2　対称 R 空間の対蹠集合

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道が Riemann 対称空間になるとき、これを**対称 R 空間**と呼ぶ。竹内 [8] は、M が対称 R 空間ならば

$$\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つことを証明した。ここで、$H_*(M, \mathbb{Z}_2)$ は M の係数 $\mathbb{Z}_2$ のホモロジー群である。

$\mathfrak{g}$ をコンパクト半単純 Lie 環とし、$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ とする。$\mathfrak{g}$ には G 不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を定めておく。$J \in \mathfrak{g}, J \neq 0$ を $(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$ を満たす元とする。J を通る G 軌道 GJ はコンパクト型 Hermite 対称空間になることが知られている。逆に任意のコンパクト型 Hermite 対称空間はこのようにして得られる。

定理 2.1 (Sánchez[7], [10]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。$X \in M$ における M の点対称を s_X で表す。$X, Y \in M$ に対して $s_X(Y) = Y$ の必要十分条件は、$[X, Y] = 0$ である。さらに以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

M の等長変換全体の単位連結成分の元で写り合う部分集合を合同という。大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ 内の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{t}$ によって $M \cap \mathfrak{t}$ という形に表現される。特に大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の軌道になる。

定理 2.2 ([10]) $\tau : M \to M$ をコンパクト型 Hermite 対称空間 M の対合的反正則等長変換とし、τ の不動点集合として M の実形 L が定まっているとする。

$$I_\tau : G \to G\ ;\ g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

によって、G の自己同型 I_τ を定める。L は J を含むと仮定する。I_τ から定まる $\mathfrak{g}$ の標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$ とする。このとき、$L = M \cap \mathfrak{p}$ が成り立つ。さらに L に対して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

L の大対蹠集合は $\mathfrak{p}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ によって $M \cap \mathfrak{a}$ という形に表現される。特に大対蹠集合は I_τ から定まる対称対の Weyl 群の軌道になる。

系 2.3 ([10]) 対称 R 空間の対蹠集合に関して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

$\mathrm{Ad}(SU(4))$ の対蹠集合は性質 (A) を満たさないことがわかる ([10])。

3　二つの実形の交叉

この節の内容はおもに [9] に基づいている。Hermite 多様体の対合的反正則等長変換の不動点集合を**実形**と呼ぶ。

定理 3.1 ([9]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の二つの実形 L_1, L_2 が横断的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

定理 3.2 ([9]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2, L_1', L_2' を M の実形とする。さらに、L_1, L_1' は合同であり、L_2, L_2' も合同であると仮定する。L_1, L_2 が横断的に交わり、L_1', L_2' も横断的に交わるならば、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1' \cap L_2')$ が成り立つ。

系 3.3 ([10]) 定理3.2の設定のもとで、さらに$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2(L_1), \#_2(L_2)\}$という条件を加えると、$L_1 \cap L_2$ と $L_1' \cap L_2'$ は合同になる。

後で述べる定理3.5の(2)は上の系の条件を満たしている。

定理 3.4 ([9]) M をコンパクト型Hermite対称空間とし、L_1, L_2 を M の横断的に交わる合同な実形とする。このとき、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

定理 3.5 ([9]) M を既約コンパクト型Hermite対称空間とし、L_1, L_2 を M 内の横断的に交わる二つの実形とする。

(1) $M = G_{2m}^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり、L_1 は $G_m^{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

(2) それ以外の場合、$L_1 \cap L_2$ は2-numberが小さい方の実形の大対蹠集合になり、次の等式が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}.$$

既約でなければ(1)のような例は他にもある。$M = (\mathbb{C}P^1)^4$ とする。$\tau_1, \tau_2 : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ を対合的反正則等長変換とする。さらに τ_1, τ_2 の定める $\mathbb{C}P^1$ の実形は横断的に交わると仮定する。

$$L_1 = \{(x, y, \tau_1(x), \tau_1(y)) \mid x, y \in \mathbb{C}P^1\},$$
$$L_2 = \{(x, \tau_2(x), y, \tau_2(y)) \mid x, y \in \mathbb{C}P^1\}$$

とおくと、L_1, L_2 は横断的に交わる M の実形になり、

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2 < 4 = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$$

が成り立つ。

4 Floer ホモロジー

この節の内容はおもに[5]に基づいている。Floerホモロジーに関する文献については[5]の文献表を参照。

定理 4.1 ([5]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_0, L_1 を M の横断的に交わる実形とする。このとき、L_0, L_1 に関する $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジーは

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

となる。つまり、交叉 $L_0 \cap L_1$ そのものが Floer ホモロジー $HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2)$ の生成元となる。

Floer ホモロジーのチェインは

$$CF(L_0, L_1) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

によって定まり、その境界作用素 $\partial : CF(L_0, L_1) \to CF(L_0, L_1)$ は

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q$$

で定まる。ここで、$n(p, q)$ は p, q, L_0, L_1 を境界条件にする正則写像の同値類の個数を mod-2 で数えたものである。このとき、$\partial \circ \partial = 0$ が成り立ち、Floer チェイン複体 $(CF(L_0, L_1), \partial)$ が構成され、商加群

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) := \ker(\partial)/\mathrm{im}(\partial)$$

が定義できる。これを L_0, L_1 に関する $\mathbb{Z}_2$ 係数 **Floer ホモロジー群**という。

定理 4.1 の設定のもとで、$p \in L_0 \cap L_1$ に対して点対称 s_p は p, q, L_0, L_1 を境界条件にする正則写像の同値類の全体に自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用を誘導する。特にその個数は偶数になり $n(p, q) = 0$ となる。よって、境界作用素は $\partial = 0$ となって、次の等式を得る。

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) = CF(L_0, L_1) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

上記議論は Floer ホモロジーが定義できれば適用可能なので、M が既約ではない場合でも同様の結論を得られる。詳細は [5] 参照。

5 その後の進展

研究集会での発表後いくつかの進展が得られたので、それらについてここで簡単に触れておく。

対合的等長変換の不動点集合の連結成分の一つを**鏡映部分多様体**と呼ぶ。田中さんとの共同研究により、定理 3.1 を次のように拡張できた。

定理 5.1 M を対称 R 空間とする。M の二つの鏡映部分多様体 L_1, L_2 が離散的に交わるならば、$L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

次の事項より定理 5.1 は定理 3.1 の拡張になっていることがわかる。

(1) コンパクト型 Hermite 対称空間は対称 R 空間である。

(2) コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は鏡映部分多様体である。

(3) 部分多様体が横断的に交わるならば、離散的に交わる。

定理 5.1 は定理 3.1 の証明と同様にして証明できる。定理 5.1 では、二つの鏡映部分多様体の次元の和が全体の次元に一致することを前提にしていないことに注意しておく。

入江さん、酒井さんとの共同研究により、定理 4.1 を利用して次の結果が得られた。

系 5.2 ([5]) $Q_n(\mathbb{C})$ 内の実形 S^n は Hamilton 体積最小である。

n が偶数のとき、S^n はそのホモロジー類内で体積最小になることを Gluck-Morgan-Ziller [3] が calibration を使って証明している。$Q_n(\mathbb{C})$ は偶数次元の胞体のみで胞体分割でき、特に奇数次元のホモロジーは消えることがわかる。よって n が奇数のときは S^n のホモロジー類での体積最小性は期待できないが、系 5.2 は Hamilton 変形の中では S^n が体積最小になることを示している。系 5.2 の証明は、Floer ホモロジーの具体的記述、Arnold-Givental の不等式、Lê Hông Vân[6] による積分公式を利用して得られる。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, Duke Math. J. **44** (1977), 745–755.

[2] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 273–297.

[3] H. Gluck, F. Morgan and W. Ziller, Calibrated geometries in Grassmann manifolds, Comm. Math. Helv. **64** (1989), 256–268.

[4] H. Iriyeh and T. Sakai, Tight Lagrangian surfaces in $S^2 \times S^2$, Geom. Dedicata **145** (2010), 1–17.

[5] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, arXiv:1108.0260

[6] Lê Hông Vân, Application of integral geometry to minimal surfaces, Int. J. Math. **4** (1993), 89–111.

[7] C. U. Sánchez, The index number of an R-space: An extension of a result of M. Takeuchi's, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 893–900.

[8] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J., **115** (1989), 43–46

[9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, to appear in J. Math. Soc. Japan

[10] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, to appear in Osaka J. Math.

[11] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. **62** no.3 (2010), 375–382.