対蹠集合とその応用

田崎博之

筑波大学

東京理科大学研究集会

「部分多様体幾何とリー群作用」

2011 年 9 月 2, 3 日

2009 年のこの研究集会での講演

「複素二次超曲面の二つの実形の交叉」

$\downarrow$ 田中真紀子さんとの共同研究

「コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形の交叉」 $\longrightarrow$ 「対称 R 空間の対蹠集合」

$|$

$\downarrow$ 入江博さん、酒井高司さんとの共同研究

「コンパクト型 Hermite 対称空間の二つの実形に関する Floer ホモロジー」

1 対蹠集合

定義と例

2 対称 R 空間の対蹠集合

基本的性質

3 二つの実形の交叉

交叉の対蹠性と基本的性質

4 Floer ホモロジー

Floer ホモロジーの具体的表示

1 対蹠集合

M : Riemann対称空間

s_x : xに関する点対称 $x \in M$

$S \subset M$: **対蹠集合**

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$\#_2 M$: Mの**2-number**

$= \sup\{\#S \mid S$は対蹠集合$\}$

S : **大対蹠集合**$\Leftrightarrow \#_2 M = \#S$

S^n の点 x における点対称は

$s_x = 1_{\mathbb{R}x} - 1_{x^\perp}$

s_x の不動点集合は $\{x, -x\}$

$\{x, -x\}$: S^n の大対蹠集合

$\#_2 S^n = 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Grassmann 多様体 $G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$

$V \in G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ の点対称

$s_V = 1_V - 1_{V^\perp}$

$\{\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_r} \rangle_{\mathbb{K}} \in G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) \mid$

標準基底から r 個とる$\}$

: $G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r})$ の大対蹠集合

$$\#_2 G_r^{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{n+r}) = \binom{n+r}{r}$$

2 対称 R 空間の対蹠集合

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道になる Riemann 対称空間: 対称 R 空間

M が対称 R 空間

$$\Rightarrow \#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$$

Hermite 多様体の対合的反正則等長変換の不動点集合: 実形

コンパクト型 Hermite 対称空間の実形

: 対称 R 空間

$\mathfrak{g}$：コンパクト半単純 Lie 環

$G = \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$

$\langle\ ,\ \rangle$：$\mathfrak{g}$ の G 不変内積

$J(\neq 0) \in \mathfrak{g}$：$(\mathrm{ad}J)^3 = -\mathrm{ad}J$

GJ：コンパクト型 $\mathrm{Hermite}$ 対称空間

逆に任意のコンパクト型

$\mathrm{Hermite}$ 対称空間はこのように

して得られる。

定理 2.1(Sánchez, Tanaka-T.)

$M = GJ$: コンパクト型 Hermite 対称空間

$X, Y \in M$

$s_X(Y) = Y \Leftrightarrow [X, Y] = 0$

(A) $\forall S$: 対蹠集合 $\exists \bar{S}$: 大対蹠集合 $S \subset \bar{S}$

(B) 二つの大対蹠集合は合同

(M の等長変換全体の単位連結成分の元で写り合う)

$\bar{S}$: 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \exists \mathfrak{t}$: 極大可換部分環

$$\bar{S} = M \cap \mathfrak{t}$$

大対蹠集合は $\mathfrak{g}$ の Weyl 群の軌道

定理 2.2(Tanaka-T.)

$M = GJ$: **コンパクト型** Hermite **対称空間**

τ : M **の対合的反正則等長変換**

L : τ **の不動点集合、**M **の実形** $J \in L$

$$I_\tau : G \to G \,;\; g \mapsto \tau g \tau^{-1}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{l} + \mathfrak{p}$: I_τ **から定まる標準分解**

このとき、$L = M \cap \mathfrak{p}$

(A) $\forall S$: **対蹠集合** $\exists \bar{S}$: **大対蹠集合** $S \subset \bar{S}$

(B) **二つの大対蹠集合は合同**

$\bar{S}$: **大対蹠集合** $\Leftrightarrow \exists \mathfrak{a} : \mathfrak{p}$ **の極大可換部分空間**

$$\bar{S} = M \cap \mathfrak{a}$$

大対蹠集合は対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{l})$ **の** Weyl **群の軌道**

系 2.3(Tanaka-T.)

対称 R 空間の対蹠集合

(A) $\forall S$: 対蹠集合 $\exists \bar{S}$: 大対蹠集合

$$S \subset \bar{S}$$

(B) 二つの大対蹠集合は合同

$\mathrm{Ad}(SU(4))$ の対蹠集合は性質 (A) を満たさない。

3 実形の交叉

定理 3.1(Tanaka-T.)

M ： コンパクト型

Hermite 対称空間

L_1, L_2 ： M の実形、$L_1 \pitchfork L_2$

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$ ： L_1 と L_2 の対蹠集合

定理3.2(Tanaka-T.)

M ： コンパクト型

　　Hermite対称空間

L_1, L_2, L'_1, L'_2 ： M の実形、

　　L_i, L'_i は合同 $(i = 1, 2)$

　　$L_1 \pitchfork L_2, L'_1 \pitchfork L'_2$

$\Rightarrow \#(L_1 \cap L_2) = \#(L'_1 \cap L'_2)$

系 3.3(Tanaka-T.)

定理 3.2 の設定のもと

$(L_i, L_i'$ は合同、$L_1 \pitchfork L_2, L_1' \pitchfork L_2')$

さらに

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$$

すなわち $L_1 \cap L_2$ は L_1 または L_2 の大対蹠集合

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$ と $L_1' \cap L_2'$ は合同

定理3.4(Tanaka-T.)

M : コンパクト型

Hermite対称空間

L_1, L_2 : Mの合同な実形、

$L_1 \pitchfork L_2$

$\Rightarrow$

$L_1 \cap L_2$: L_1とL_2の大対蹠集合

定理 3.5(Tanaka-T.)

M : 既約コンパクト型 Hermite 対称空間

$\boldsymbol{L_1, L_2}$: $\boldsymbol{M}$ の実形、$\boldsymbol{L_1 \pitchfork L_2}$, $\boldsymbol{\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2}$

(1) $(\boldsymbol{M, L_1, L_2}) \cong$

$\boldsymbol{(G^{\mathbb{C}}_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), G^{\mathbb{H}}_{m}(\mathbb{H}^{2m}), U(2m))\ (m \geq 2)}$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\#(L_1 \cap L_2)} &\boldsymbol{= 2^m} \\ &\boldsymbol{< \binom{2m}{m} = \#_2 G^{\mathbb{H}}_{m}(\mathbb{H}^{2m})} \\ &\boldsymbol{< 2^{2m} = \#_2 U(2m)} \end{aligned}$$

(2) (M, L_1, L_2) : (1) 以外

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$: L_1 の大対蹠集合

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$$

既約でなければ (1) のような例は他にもある

$M = (\mathbb{C}P^1)^4$

$\tau_1, \tau_2 : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$: 対合的反正則等長変換

τ_1, τ_2 の定める $\mathbb{C}P^1$ の実形は横断的に交わる

$$L_1 = \{(x, y, \tau_1(x), \tau_1(y)) \mid x, y \in \mathbb{C}P^1\},$$

$$L_2 = \{(x, \tau_2(x), y, \tau_2(y)) \mid x, y \in \mathbb{C}P^1\}.$$

このとき L_1, L_2 は横断的に交わる M の実形

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2 < 4 = \#_2 L_1 = \#_2 L_2.$$

4 Floer ホモロジー

定理 4.1(Iriyeh-Sakai-T.)

M ： 既約コンパクト型

Hermite 対称空間

L_0, L_1 ： M の実形、$L_0 \pitchfork L_1$

このとき

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

Floer ホモロジーのチェイン

$$CF(L_0, L_1) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}_2 p$$

境界作用素 $\partial : CF(L_0, L_1) \to CF(L_0, L_1)$

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q$$

$n(p, q)$ は p, q, L_0, L_1 を境界条件にする正則写像の同値類の個数を mod-2 で数えたもの

L_0, L_1 に関する $\mathbb{Z}_2$ 係数 Floer ホモロジー群

$$HF(L_0, L_1 : \mathbb{Z}_2) := \ker(\partial)/\mathrm{im}(\partial)$$

点対称 s_p の存在 $\Rightarrow \partial = 0 \Rightarrow$ 定理の結論