コンパクトLie群の極大対蹠部分群

田崎博之

この講演の内容は田中真紀子さんとの共同研究の成果に基づいている。2011 年のこの研究集会で対称 R 空間の対蹠集合はあるよい性質 (定理 2.1) を持っていることを示した。これに対して、対称 R 空間ではない一般の Riemann 対称空間の対蹠集合がどのような性質を持っているのか、まだ全貌は明らかになっていない。この講演では、いくつかの古典型コンパクト Lie 群の商群の対蹠集合について得られた結果を述べる。

1 対蹠集合

Riemann 対称空間 M の点 x における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は次の条件を満たすとき、**対蹠集合**という。すべての $x, y \in S$ に対して $s_x(y) = y$ が成り立つ。M の対蹠集合の元の個数の上限を **2-number** といい $\#_2 M$ で表す。$\#_2 M$ は有限の値になることがわかる。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**と呼ぶ。これらの概念は Chen-長野 [1] が導入した。

簡単な例を一つ挙げておく。1 次ユニタリ群 $U(1)$ において $\{\pm z\}\ \ (z \in U(1))$ は大対蹠集合になる。特に単位元を含む大対蹠集合は部分群になる。

2 対称 R 空間の対蹠集合

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道が Riemann 対称空間になるとき、これを**対称 R 空間**と呼ぶ。

定理 2.1 (田中-T.[2]) 対称 R 空間の対蹠集合に関して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対して、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合は合同になる。

この定理より、対称 R 空間の場合には、大対蹠集合がわかれば対蹠集合の全貌を把握できることになる。ところが、古典型コンパクト Lie 群の商群の場合には、この定理の性質が成り立たないものが多数存在していることがわかる。これについては次の節で述べる。

3 コンパクト Lie 群

コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、これに関してコンパクト Riemann 対称空間になる。よって、コンパクト Lie 群の対蹠集合について考えることができる。コンパクト Lie 群の極大対蹠集合が単位元を含むとき、$\mathbb{Z}_2$ のいくつかの積に同型な部分群になることがわかる。多くの古典型コンパクト Lie 群は対称 R 空間になるが、一般にそれらの商群は対称 R 空間ではない。

ここでは、特に $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群に関して得られた結果を述べる。これらのほとんどは対称 R 空間ではない。

$$\Delta_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n), \quad \Delta_n^{\pm} = \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

とすると、Δ_n と Δ_n^+ はそれぞれ $U(n)$ と $SU(n)$ の共役を除いて一意的な大対蹠部分群である。これに対してこれらの商群 $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群を記述するにはさらに記号を準備する必要がある。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2). \quad D^{\pm}[4] = \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}$$

によって二面体群 $D[4]$ とその部分集合 $D^{\pm}[4]$ を定める。自然数 n を 2 の冪 2^k と奇数 l の積 $2^k \cdot l$ に分解し、$0 \leq s \leq k$ に対して $D[4]$ の s 個のテンソル積と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積を

$$C(s,n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

によって定める。

定理 3.1 (田中-T.[3]) μ を自然数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。$U(n)$ から $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ への自然な射影を π_n で表す。このとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n).$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

注意 3.2 (2) の $(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は、$\Delta_2 \subsetneq D[4]$ という包含関係があるので、$C(k-1, 2^k) \subsetneq C(k, 2^k)$ が成り立ち、$C(k-1, 2^k)$ は極大ではない。

定理 3.1 の証明の概略　$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 A をとり、$B = \pi_n^{-1}(A)$ とおく。B が可換ならば、A は $\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n)$ と共役になる。B が非可換ならば、n は偶数になり、$n = 2n'$ とおくと、B は $D[4] \otimes U(n')$ の部分群と共役になる。この議論を続けることにより定理を得る。

定理 3.3 (田中-T.[3]) μ を n の約数、$\mathbb{Z}_\mu$ を $SU(n)$ の中心内の μ 次巡回群、θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。このとき、$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

(a) $k = 1$ のとき、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l).$$

ただし、$n = \mu = 2$ のときは $\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$ を除く。

(b) $k \geq 2$ のとき、$\mu = 2^{k'} \cdot l'$, $1 \leq k' \leq k$ であり、l' は l の約数とする。

(b1) $k' = k$ ならば、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n(C(s, n)) \quad (1 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(b2) $1 \leq k' < k$ ならば、

$$\pi_n(\{1, \theta\}\Delta_n^+), \quad \pi_n(\{1, \theta\}C(s, n)) \quad (1 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s, n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除き、$n = 4$ の場合はさらに $\pi_4(\{1, \theta\}\Delta_4^+)$ を除く。

定理 3.3 の証明の概略　$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 A をとり、A を含む $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群 A' をとる。A' に定理 3.1 の結果を適用し、$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ との共通部分を考えることにより定理を得る。

なお、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ と $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の対蹠集合の元の個数の最大値は Chen-長野 [1] が求めている。

定理 3.1 と 3.3 において、極大対蹠部分群の共役類がただ一つの場合は対称 R 空間の定理 2.1 と同じ主張が成り立つことになる。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., 308 (1988), 273–297.

[2] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

[3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of compact Lie groups, in preparation.