コンパクトLie群の極大対蹠部分群

田崎博之

筑波大学数理物質系

研究集会「部分多様体幾何とリー群作用 2015」
2015 年 9 月 8 日

1 対蹠集合

M : Riemann 対称空間

s_x : x に関する点対称 $x \in M$

$S \subset M$: 対蹠集合

$\Leftrightarrow \forall x, y \in S \quad s_x y = y$

$|S|$: 集合 S の元の個数

$\#_2 M$: M の 2-number

$= \sup\{|S| \mid S$ は対蹠集合 $\}$

S : 大対蹠集合 $\Leftrightarrow \#_2 M = |S|$

$\{x, -x\}$ ： S^n の大対蹠集合

$$\#_2 S^n = 2$$

$$\left\{ 1_3, \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

： $SO(3)$ の大対蹠集合

$$\#_2 SO(3) = 4 = 2^2$$

さらに上記大対蹠集合は部分群

$$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

2 対称 R 空間

Riemann 対称対の線形イソトロピー作用の軌道になる Riemann 対称空間: 対称 R 空間

等長変換全体の単位連結成分の元で写り合う

: 合同

定理 2.1(田中-T.) 対称 R 空間において

(A) $\forall$ 対蹠集合 $\subset$ $\exists$ 大対蹠集合

(B) 大対蹠集合同士は合同

大対蹠集合は対称 R 空間を線形イソトロピー作用が定める対称対の Weyl 群の軌道になる。

3 コンパクト Lie 群

コンパクト Lie 群：両側不変 Riemann 計量

$\Rightarrow$ コンパクト Riemann 対称空間

単位元を含む極大対蹠集合 $\Rightarrow$ 部分群

$\cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$

多くの古典型コンパクト Lie 群：対称 R 空間

古典型コンパクト Lie 群の商群：一般には対称

R 空間ではない

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$, $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu, O(n)/\{\pm 1_n\}$,

$SO(n)/\{\pm 1_n\}, Sp(n)/\{\pm 1_n\}$

の極大対蹠部分群の分類結果を述べる。

$$\boldsymbol{\Delta}_n = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n),$$
$$\boldsymbol{\Delta}_n^{\pm} = \{g \in \boldsymbol{\Delta}_n \mid \det g = \pm 1\}$$

$\boldsymbol{\Delta}_n$ と $\boldsymbol{\Delta}_n^{+}$ はそれぞれ $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ と $SO(n)$, $SU(n)$ の共役を除いて一意的な極大対蹠部分群である。

これらは大対蹠集合になり、定理 2.1 と同じ主張が成り立つ。

$$D[4] = \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset O(2),$$

$$D^{\pm}[4] = \{ g \in D[4] \mid \det g = \pm 1 \}.$$

$D[4]$：二面体群、正四角形を不変にする

自然数 n を $n = 2^k \cdot l$ (l : 奇数) と分解し、

$0 \leq s \leq k$ に対して s 個の $D[4]$ と $\Delta_{n/2^s}$ のテンソル積 $C(s,n)$ を定める。

$$C(s,n) = D[4] \otimes \cdots \otimes D[4] \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

行列のテンソル積

$$\boldsymbol{A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & a_{pq}B \end{bmatrix}}$$

$\boldsymbol{G_1 \subset GL(\mathbb{R}^{n_1}), G_2 \subset GL(\mathbb{R}^{n_2})}$ に対して

$$\boldsymbol{G_1 \otimes G_2 = \{g_1 \otimes g_2 \mid g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2\}}$$

$\boldsymbol{G_1, G_2}$: 部分群

$\Rightarrow \boldsymbol{G_1 \otimes G_2}$: $\boldsymbol{GL(\mathbb{R}^{n_1 n_2})}$ の部分群

定理 3.1(田中-T.) μ : 自然数、

$\mathbb{Z}_\mu$: $U(n)$ の中心内の μ 次巡回群、

θ : 1 の原始 2μ 乗根、

$\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ 自然な射影

$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

注意 3.2　$\boldsymbol{\Delta_2} \subsetneqq \boldsymbol{D}[4]$ より

$$\boldsymbol{D}[4] \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{D}[4] \otimes \boldsymbol{\Delta_2}$$
$$\subsetneqq \boldsymbol{D}[4] \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{D}[4] \otimes \boldsymbol{D}[4]$$

すなわち $\boldsymbol{C(k-1, 2^k)} \subsetneqq \boldsymbol{C(k, 2^k)}$ が成り立ち、$\boldsymbol{C(k-1, 2^k)}$ は極大ではない。

定理 3.1 の証明の概略

A : $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群

$B = \pi_n^{-1}(A)$ を調べる

B が可換の場合、同時対角化により

A は $\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$ と共役

B が非可換の場合、n は偶数、$n = 2n'$ とおく

B の元 a, b が存在し $ab = -ba$ を満たす

$$I_{n'} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \otimes 1_{n'} \text{ とおく}$$

a, b は $I_{n'}$ に共役、よって a, b は

$M^+ = \{uI_{n'}u^{-1} \mid u \in U(n)\} \cong G_{n'}(\mathbb{C}^n)$

に含まれる (a, b は極地 M^+ に含まれる)

$a = I_{n'}$ としても一般性は失われない

M^+ において $-a$ は s_a の孤立不動点 (a の極)

b は a と $-a$ を結ぶ M^+ 内の最短測地線の中点

(b は $a, -a$ から定まる中心体の元)

b は $K_{n'} = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \otimes 1_{n'}$ に共役

$b = K_{n'}$ としても一般性は失われない

$\langle a, b\rangle = D[4] \otimes 1_{n'} \subset B$

さらに $B \subset D[4] \otimes U(n')$

$\exists B' \subset U(n') \quad B = D[4] \otimes B'$

$\pi_{n'}(B') : U(n')/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群

この操作を繰り返す ＋ 若干の考察

$\Rightarrow$ 定理 3.1 の証明

定理 3.3(田中-T.) μ : n の約数、

$\mathbb{Z}_\mu$: $SU(n)$ の中心内の μ 次巡回群、

θ : 1 の原始 2μ 乗根、

$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+)$$

(2) n かつ μ が偶数の場合、

(a) $k = 1$ のとき、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l)$$

ただし、$n = \mu = 2$ のときは $\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$

を除く。

(b) $k \geq 2$ のとき、$\mu = 2^{k'} \cdot l'$

(b1) $k' = k$ ならば、

$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-)$,

$\pi_n(C(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k)$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(b2) $1 \leq k' < k$ ならば、

$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+)$,

$\pi_n(\{1,\theta\}C(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k)$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除き、

$n = 4$ の場合はさらに $\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$ を除く。

注意 3.4

$\mathbf{\Delta}_4^+ = \mathbf{\Delta_2} \otimes \mathbf{\Delta_2} \subsetneq D[4] \otimes D[4] = C(2,4)$ が成り立つので、$\mathbf{\Delta}_4^+$ の場合は除かれる。

定理 3.3 の証明の概略

A : $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群

A' : A を含む $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群

A' に定理 3.1 を適用

$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ との共通部分 $\Rightarrow$ 定理 3.3 の証明

予稿集原稿提出後得られた結果：

$O(n)/\{\pm 1_n\}, SO(n)/\{\pm 1_n\}, Sp(n)/\{\pm 1_n\}$
の極大対蹠部分群

四元数の標準的な基底の ± 1 倍の全体を
$Q[8] = \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ とおく。

定理 3.5(田中-T.) $\quad n = 2^k \cdot l$, l は奇数
(I) $O(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\pi_n(C(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除く。

(II) n が偶数のとき、$SO(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

(1) $k = 1$ の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+), \quad \pi_n(D^+[4] \otimes \Delta_l)$$

ただし、$n = 2$ の場合は $\pi_2(\Delta_2^+)$ を除く。

(2) $k \geq 2$ の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+), \quad \pi_n(C(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合を除き、

$n = 4$ の場合はさらに $\pi_4(\Delta_4^+)$ を除く。

(III) $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役

$$\pi_n(Q[8]\cdot C(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$ の場合を除く。