複素旗多様体の実形の交叉と Floer ホモロジーへの応用 – 合同な実形の場合 –

入江 博*

茨城大学理学部

Kähler 多様体において対合的反正則等長変換の固定点集合として与えられる部分多様体を**実形**と呼ぶ。定義から実形は全測地的 Lagrange 部分多様体になる。コンパクト型 Hermite 対称空間の (合同とは限らない) 二つの実形が離散的に交わるとき、その交叉が対蹠集合になることが [12] [10, 11] により示され、これを利用して [5] において実形の対の Floer ホモロジーが求められた。[5] は Y.-G. Oh 氏による実形の Floer ホモロジーの結果 [9] の Hamilton イソトピックとは限らない実形の対への拡張である。さらに、[4] では二つの実形の交叉が離散的になるための必要十分条件が対称三対を用いて与えられ、その交叉がある種の Weyl 群の軌道として記述された。

本講演は、井川治氏（京都工芸繊維大学)、奥田隆幸氏（広島大学)、酒井高司氏（首都大学東京)、田崎博之氏（筑波大学）との進行中の共同研究に基づく。我々は、コンパクト型 Hermite 対称空間に関する上記の一連の結果を複素旗多様体に拡張することを目標に研究を進めている。今回は、合同な実形の交叉の対蹠性を利用した実形の Floer ホモロジーの計算への応用に焦点をあてる。

1　複素旗多様体とその対蹠集合

G を連結コンパクト半単純 Lie 群とする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 $x_0 (\neq 0)$ をとる。G の随伴表現による x_0 の軌道

$$M := \mathrm{Ad}(G)x_0 \subset \mathfrak{g}$$

は**複素旗多様体**と呼ばれる。x_0 を固定する G のイソトロピー部分群を G_{x_0} と表すと M は G/G_{x_0} と微分同型になる。$\mathfrak{g}$ に $\mathrm{Ad}(G)$ 不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を与える。G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ の岩澤分解により、M には $G^{\mathbb{C}}$ が推移的に作用し、そのイソトロピー部分群 $P^{\mathbb{C}}$ は $G^{\mathbb{C}}$ の放物型複素 Lie 部分群になることがわかる。したがって、$M \cong G^{\mathbb{C}}/P^{\mathbb{C}}$ には $G^{\mathbb{C}}$ 不変な複素構造 J が定まる。

*本研究は科研費（課題番号:16K05120）の助成を受けたものである。

また、M には

$$\omega(X_x^*, Y_x^*) := \langle x, [X, Y] \rangle \quad (x \in M,\ X, Y \in \mathfrak{g})$$

によりシンプレクティック形式 (**Kirillov-Kostant-Souriau 形式**) が定まる。さらに、$\omega(\cdot, J\cdot)$ は M 上の G 不変な Kähler 計量となる。

次に対蹠集合を定義する。対称空間の点対称の概念は、複素旗多様体 M については以下のように拡張される。$x \in M$ と $g \in Z(G_{x_0})$ に対して、$s_{x,g} : M \to M$ を

$$s_{x,g}(y) := \mathrm{Ad}(g_x g g_x^{-1}) y \quad (y \in M)$$

と定める。ここで、$g_x \in G$ は $\mathrm{Ad}(g_x)x_0 = x$ を満たすものとする。この定義は $\mathrm{Ad}(g_x)x_0 = x$ なる $g_x \in G$ の取り方によらず、$s_{x,g}(x) = x$ を満たす。ところが、$g \in Z(G_{x_0})$ によって点 $x \in M$ は $s_{x,g}$ の孤立固定点になる場合もならない場合もある。そこで、すべての $g \in Z(G_{x_0})$ を考慮した集合

$$\mathrm{Fix}(s_x, M) := \{ y \in M \mid s_{x,g}(y) = y \text{ for } \forall g \in Z(G_{x_0}) \}$$

を考える。

定義. $\mathcal{A} \subset M$ が対蹠集合であるとは、

$$y \in \mathrm{Fix}(s_x, M) \text{ for } \forall x, y \in \mathcal{A}$$

が成り立つこととする。M がコンパクト型 Hermite 対称空間の場合、この定義は通常の対蹠集合の定義 [1] と同値である。

次の結果は複素旗多様体 M の対蹠集合の性質として基本的である。

定理 1 ([6] Theorem 1). 複素旗多様体 M の極大な対蹠集合は $\mathfrak{g}$ のある極大可換部分環 $\mathfrak{t}'$ との共通部分 $M \cap \mathfrak{t}'$ となり、これは $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}'$ に関する Weyl 群の軌道である。また、M の任意の二つの極大な対蹠集合は G の随伴作用により移りあう。

2 実旗多様体

(G, K) をコンパクト型対称対とし、その対合による G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の標準分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$$

と表す。以下、基点 x_0 が $\mathfrak{p}$ に含まれる場合を考える。x_0 を通る $\mathrm{Ad}(K)$ 軌道 $L = \mathrm{Ad}(K)x_0$ を**実旗多様体**と呼ぶ。x_0 を固定する K のイソトロピー部分群を K_{x_0} と表すと、L は K/K_{x_0} と微分同型になる。K は G の Lie 部分群であるから、L は M に部分多様体として含まれる。また、

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{k} + \sqrt{-1}\mathfrak{p}$$

とおくと、$\mathfrak{g}'$ は $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実形になる。$\mathfrak{g}'$ を Lie 環とする $G^{\mathbb{C}}$ の解析的部分群を G' とすると、(G', K) は非コンパクト型 Riemann 対称対になる。G' の岩澤分解により、L には G' が推移的に作用する。G' に関する $G^{\mathbb{C}}$ の複素共役を $\tilde{\tau}$ と表すと、$P^{\mathbb{C}}$ は $\tilde{\tau}$ 不変であり、したがって $\tilde{\tau}$ は M に対合的反正則等長変換 τ を誘導する。$\tilde{\tau}$ による $G^{\mathbb{C}}$ の固定点集合の単位連結成分が G' であることから、τ による M の固定点集合の x_0 を含む連結成分は L と一致する。よって、L は M の実形となる。

3　二つの合同な実旗多様体の交叉

$g \in G$ とする。M 内において実旗多様体 L と合同な $\mathrm{Ad}(g)L$ との交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(g)L$ を考察する。x_0 を含む $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ をとる。$A := \exp \mathfrak{a}$ とおくと、A はトーラスであり、$G = KAK$ が成り立つ (e.g. [7, p. 170])。これより $g = k_1 a k_2$ $(k_1, k_2 \in K,\ a \in A)$ と表すことができる。L は $\mathrm{Ad}(K)$ 軌道であるから、$\mathrm{Ad}(K)$ 不変であり、

$$L \cap \mathrm{Ad}(g)L = L \cap \mathrm{Ad}(k_1 a k_2)L = \mathrm{Ad}(k_1)(L \cap \mathrm{Ad}(a)L)$$

となる。したがって、交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(g)L$ を調べることは、$g = a \in A$ の場合に帰着する。$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分環 $\mathfrak{t}$ をとり、$\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$ に関する $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ のルート系を

$$\Delta := \{\alpha \in \mathfrak{t} - \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}$$

とする。ここで、

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [T, X] = \sqrt{-1}\langle \alpha, T\rangle X \text{ for } T \in \mathfrak{t}\}$$

である。また、$\gamma \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\gamma := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid [H, X] = \sqrt{-1}\langle \gamma, H\rangle X \text{ for } H \in \mathfrak{a}\}$$

と定め、

$$R := \{\gamma \in \mathfrak{a} - \{0\} \mid \tilde{\mathfrak{g}}_\gamma \neq \{0\}\}$$

により制限ルート系を定める．$\mathfrak{t}$ から $\mathfrak{a}$ への直交射影を $H \mapsto \bar{H}$ で表すと

$$R = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Delta,\ \bar{\alpha} \neq 0\}$$

が成り立つ。G の $\mathfrak{t}$ に関する Weyl 群を $W(G)$、対称対 (G, K) の $\mathfrak{a}$ に関する Weyl 群を $W(G, K)$ と表す。

定理 2. 上記設定のもとで、$H \in \mathfrak{a}$ をとり、$a := \exp H \in A$ と表す。このとき、

$$\langle \lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z} \quad \text{for} \quad \forall \lambda \in R \tag{1}$$

ならば、交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ は離散的になり、

$$L \cap \mathrm{Ad}(a)L = M \cap \mathfrak{a} = W(G, K)x_0$$

が成り立つ。また、$W(G)x_0 \supset W(G, K)x_0$ となり、$W(G, K)x_0$ は M の対蹠集合である。

4 Lagrangian Floer ホモロジー

この節では、Y.-G.Oh による単調な Lagrange 部分多様体の Floer ホモロジーの構成 [8] を説明する。(M,ω) を閉シンプレクティック多様体、L_0 および L_1 を Hamilton イソトピックとは限らない M の Lagrange 部分多様体とし、これらは横断的に交わると仮定する。このとき、交叉 $L_0 \cap L_1$ の各要素を生成元とする自由 $\mathbb{Z}_2$-加群を $CF(L_0,L_1)$ と表す。以下で見るようにこれにはチェイン複体の構造が入り、**Floer チェイン複体**と呼ばれる。

M 上の概複素構造 J がシンプレクティック構造 ω と**整合的** (compatible) であるとは、$\omega(JV,JW) = \omega(V,W)$ かつ $\omega(V,JV) > 0$ が任意の 0 でないベクトル $V,W \in T_pM$ $(\forall p \in M)$ に対して成り立つことをいう。このとき、$g(\cdot,\cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ は M 上の Hermite 計量を定める。M 上のシンプレクティック構造 ω と整合的な概複素構造の 1 パラメータ族 $J = \{J_t\}_{0\le t\le 1}$ をとる。**J-正則 strip** とは、写像

$$u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$$

であって、条件

$$\begin{cases} \bar{\partial}_J u := \dfrac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(\cdot,0) \in L_0,\ u(\cdot,1) \in L_1, \\ u(-\infty,\cdot) \in L_0 \cap L_1,\ u(+\infty,\cdot) \in L_0 \cap L_1 \end{cases} \tag{2}$$

を満たすものである。ここで、$\mathbb{R} \times [0,1]$ は $s + \sqrt{-1}t$ を座標系とする $\mathbb{C}$ の部分集合とみなしている。方程式 $\bar{\partial}_J u = 0$ の解で (2) の 2 番目の境界条件をみたしているものについて、3 番目の漸近条件をみたすことと u の**エネルギー**

$$E(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}\times[0,1]} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial s}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \right) dsdt$$

が有限であることは同値である。

2 つの交点 $p,q \in L_0 \cap L_1$ をつなぐ J-正則 strip 全体の空間を $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1 : p,q)$ と表す。さらに、

$$\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1) := \bigcup_{p,q \in L_0\cap L_1} \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1 : p,q)$$

とおく。概複素構造の 1 パラメータ族 J は、それが定める非線形 Cauchy-Riemann 作用素 $\bar{\partial}_J$ の線形化 $D_u\bar{\partial}_J$ がすべての $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1)$ について全射であるとき、**regular** であるという。regular な J について、各 $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0,L_1 : p,q)$ は有限次元の滑らかな多様体になる。regular な概複素構造全体の集合を $\mathcal{J}^{reg}$ と表す。集合 $\mathcal{J}^{reg}$ は、概複素構造の 1 パラメータ族の全体の集合 $\mathcal{J}$ の中の第 2 類集合である。以下、

特に断らない限り $J \in \mathcal{J}^{reg}$ を仮定する。J-正則 strip $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ について

$$\dim(T_u\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)) = \mathrm{Index}(D_u\bar{\partial}_J)$$

が成り立つ。ここで、右辺は線形化作用素 $D_u\bar{\partial}_J$ の Fredholm 指数を表す。この数は u の Maslov 指数 $\mu(u)$ と等しいことが知られている。

J-正則 strip $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ に対し、$u(\cdot + s_0, \cdot)$ も任意の $s_0 \in \mathbb{R}$ について $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1; p, q)$ の要素になるので、$\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ は自由な $\mathbb{R}$-作用をもつ。そこで、この作用で割ったモジュライ空間

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_J(L_0, L_1 : p, q) &:= \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)/\mathbb{R},\\ \mathcal{M}_J(L_0, L_1) &:= \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)/\mathbb{R}\end{aligned}$$

を定義する。J-正則 strip $u \in \tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1)$ でその同値類 $[u]$ が $\mathcal{M}_J(L_0, L_1)$ の 0 次元連結成分の一つであるとき、u あるいはその同値類 $[u]$ は **isolated trajectory** と呼ばれる。境界作用素 $\partial : CF(L_0, L_1) \to CF(L_0, L_1)$ を

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p, q) \cdot q$$

$(p \in L_0 \cap L_1)$ により定義する。ここで、$n(p, q)$ は $\tilde{\mathcal{M}}_J(L_0, L_1 : p, q)$ 内の isolated trajectory の個数を mod-2 で数えたものである。このとき、$\partial \circ \partial = 0$ が示せれば、Floer チェイン複体 $(CF(L_0, L_1), \partial)$ が構成され、商加群

$$HF(L_0, L_1; \mathbb{Z}_2) := \ker(\partial)/\mathrm{im}(\partial)$$

が定義できる。これを Lagrange 部分多様体の $\mathbb{Z}_2$ 係数の **Floer ホモロジー群**という。

シンプレクティック多様体 (M, ω) の閉 Lagrange 部分多様体 L について、2 つの準同型

$$I_{\mu,L} : \pi_2(M, L) \to \mathbb{Z}, \quad I_\omega : \pi_2(M, L) \to \mathbb{R}$$

が次のように定義される。$I_{\mu,L}$ は、各写像 $w : (D^2, \partial D^2) \to (M, L)$ に対して、単位円盤 D^2 上のシンプレクティックベクトル束 w^*TM と $\partial D^2 \cong S^1$ 上の Lagrange 部分ベクトル束 $(w|\partial D^2)^*TL$ との対 $(w^*TM, (w|\partial D^2)^*TL)$ の Maslov 指数 $I_{\mu,L}(w)$ を対応させる写像とする。I_ω は $I_\omega(w) = \int_{D^2} w^*\omega$ で定義する。閉 Lagrange 部分多様体 L は、ある定数 $c > 0$ が存在して $I_\omega = cI_{\mu,L}$ が成り立つとき、**単調** (monotone) であるという。単調な閉 Lagrange 部分多様体 L について、部分群 $\mathrm{im}(I_{\mu,L}) \subset \mathbb{Z}$ の正の生成元を Σ_L と表し、L の**最小 Maslov 数**と呼ぶ。

定理 3 ([8] Theorems 4.4, 5.1)**.** (L_0, L_1) を必ずしも Hamilton イソトピックとは限らない単調な閉 Lagrange 部分多様体の対で、横断的に交わっているとする。$\Sigma_{L_i} \geq 3$ $(i = 0, 1)$ および、$\mathrm{im}(\pi_1(L_i)) \subset \pi_1(M)$ は少なくとも一方の L_i でねじれ部分群であると仮定する[1]。このとき、稠密な部分集合 $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}^{reg}$ が存在し、$J \in \mathcal{J}'$ に対し

[1]複素旗多様体 M は、$\pi_1(M) = 0$ なのでこの条件は自動的に満たされる。

(1) ∂ は well-defined,
(2) $\partial^2 = 0$,
(3) $HF(L_0, L_1; \mathbb{Z}_2)$ は $J \in \mathcal{J}'$ の取り方によらず、また、Hamilton イソトピー不変である。

Floer の構成の Oh によるこの拡張は、コンパクト型 Hermite 対称空間やより一般に複素旗多様体の実形を扱うのに有用である。以下、複素旗多様体の単調な実形 L に対して Floer ホモロジー $HF(L; \mathbb{Z}_2) := HF(L, L; \mathbb{Z}_2)$ の計算を実行するが、この場合、定理 3 の条件 $\Sigma_{L_i} \geq 3$ $(i = 0, 1)$ は $\Sigma_L \geq 2$ に緩めることができる ([8, Addendum])。

5 実旗多様体の Floer ホモロジー

5.1 設定

前節までの設定に加え、複素旗多様体 (M, J, ω) は **Kähler-Einstein かつ最小 Chern 数が 2 以上**と仮定する (e.g. [5])。このとき、M の実形 L は単調となり ([5, Corollary 12])、L の最小 Maslov 数は 2 以上となる ([5, Corollary 13])。

複素旗多様体 $M = \mathrm{Ad}(G)x_0$ 内の実旗多様体 $L = \mathrm{Ad}(K)x_0 = \mathrm{Fix}(\tau, M)$ の Floer ホモロジー $HF(L; \mathbb{Z}_2)$ を計算するには、離散的交叉 $L \cap \mathrm{Ad}(a)L$ において $a \in A$ を注意深く選ぶ必要がある。ここでは、Oh がコンパクト型 Hermite 対称空間に用いた議論を自然に拡張してみる。具体的な $\mathrm{Ad}(a)$ は下の命題 4 に従ってとる。Oh の議論では, 基点 x_0 を特に意識する必要がなく, 対蹠集合のどの要素も同等に扱える.

M の正則ベクトル場全体は $\mathfrak{g} \oplus J\mathfrak{g}$ と表せるが、$J\mathfrak{g}$ と

$$\mathfrak{g}(L) := \{X \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \mid X|_L \text{ is tangent to } L\}$$

との共通部分 $\mathfrak{g}(L) \cap J\mathfrak{g}$ は $\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ に等しい。したがって、$\sqrt{-1}\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{h}^-$ は $\mathfrak{a} = \sqrt{-1}\mathfrak{h}^-$ を満たすように取れる。

$\xi \in \mathfrak{h}^-$ をとり、$H := \sqrt{-1}\xi \in \mathfrak{a}$ を考える。ここで、十分小さい $t(\neq 0)$ に対しては tH が定理 2 の条件 (1) を満たし、かつ $J\xi^*$ の flow $\psi_t = \mathrm{Ad}(\exp tH)$ が周期的で周期 1 になるようにとれることが定理 2 から保証される。$J\xi^*$ は L に直交している。$\phi_t := \psi_{t/2^N}$ $(N \in \mathbb{N})$ とおくと、[9, Proposition 3.1] の複素旗多様体への自然な拡張である次が示せる。

命題 4. 上の設定のもとで、M の正則等長変換の 1 パラメータ族 $\phi := \{\phi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ は以下の性質をもつ。
(1) $\tau\phi_t\tau = \phi_t^{-1}$.
(2) 十分大きい自然数 N に対して、$(\phi_1)^{2^N} = id_M$ かつ $(\phi_1)^k \neq id_M$ $(1 \leq k < 2^N)$.
(3) 交叉 $L \cap \phi_t(L)$ $(0 < t \leq 1)$ は離散的で、定理 2 の結論を満たす。

このとき、Duistermaat の結果 [2, Theorem 3.1] と定理 2 により、

$$\mathrm{Crit}(f_{\sqrt{-1}\xi}|_L) = L \cap \phi_1(L) = W(G,K)x_0 \tag{3}$$

が成り立つ。ここで、$f_{\sqrt{-1}\xi}$ は Hamilton ベクトル場 $J\xi^*$ に対応する M 上の Hamilton 関数を表す。今の場合、$f_{\sqrt{-1}\xi}|_L$ は L 上の tight な Morse 関数になる。

5.2 計算

5.1 節の設定で、J-正則 strip のモジュライ空間

$$\tilde{\mathcal{M}}_J(L,\phi_1(L)) = \bigcup_{p,q\in L\cap\phi(L)} \tilde{\mathcal{M}}_J(L,\phi_1(L):p,q)$$

を考察する。J は 1 節で定めた $G^{\mathbb{C}}$ 不変な複素構造であることに注意する。コンパクト型 Hermite 対称空間 M の場合の J の regularity についての Oh の証明 [9] は、M の正則二重断面曲率が非負であることを利用している。複素旗多様体では、この曲率の条件が成立しないが、代わりに $G^{\mathbb{C}}$ の作用を利用して次のことが示せる。

命題 5. M の $G^{\mathbb{C}}$ 不変な複素構造 J は regular である。

これを用いて、$\mathcal{M}_J(L,\phi_1(L))$ の 0 次元部分がコンパクトであることが示せる。次の命題は [9, Proposition 4.6] を精密にしたものである。一つ記号を準備する。$p,q\in L\cap\phi_1(L)$ および $l\in\mathbb{N}$ に対し,

$$\hat{\mathcal{M}}^{(l)}_{J,\phi}(p,q) := \left\{ u\in\mathcal{M}_J(L,\phi_1(L):p,q) \;\middle|\; \begin{array}{l} u \text{ は isolated}, \\ u=\phi_1^{2^k}\circ u \text{ for } l<k<N \\ \text{かつ } u\neq\phi_1^{2^l}\circ u \end{array} \right\}$$

命題 6. J-正則 strip のモジュライ空間 $\mathcal{M}_J(L,\phi_1(L):p,q)$ の 0 次元部分は

$$\hat{\mathcal{M}}^{(N-1)}_{J,\phi}(p,q)\cup\cdots\cup\hat{\mathcal{M}}^{(l)}_{J,\phi}(p,q)\cup\cdots\cup\hat{\mathcal{M}}^{(1)}_{J,\phi}(p,q)$$

と非交和に分解し、各 $\hat{\mathcal{M}}^{(l)}_{J,\phi}(p,q)$ には (空でなければ) $(\phi_1)^{2^l}$ から誘導される自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用が入る。

証明. $u\in\hat{\mathcal{M}}_{J,\phi}(p,q)$ を任意にとる. この u に対して J-正則写像

$$(\phi_1)^{2^{N-1}}u:\mathbb{R}\times[0,1]\to M$$

を考える. 仮定より $u(-\infty,t)=p,\ u(+\infty,t)=q$ であり, p,q は対蹠集合の要素であるから, $\phi_1(p)=p,\ \phi_1(q)=q$. よって,

$$\left((\phi_1)^{2^{N-1}}u\right)(-\infty,t)=(\phi_1)^{2^{N-1}}(u(-\infty,t))=(\phi_1)^{2^{N-1}}(p)=p,$$
$$\left((\phi_1)^{2^{N-1}}u\right)(+\infty,t)=(\phi_1)^{2^{N-1}}(u(+\infty,t))=(\phi_1)^{2^{N-1}}(q)=q$$

がわかる. 境界条件を確認するために次を示す.

主張. $(\phi_1)^{2^{N-1}}(L) = L$.

(証). $\forall x \in L$ に対して,

$$\begin{aligned} \tau\left((\phi_1)^{2^{N-1}}(x)\right) &= \tau(\phi_1)^{2^{N-1}}\tau(x) = (\tau\phi_1\tau)^{2^{N-1}}(x) \\ &= (\phi_1^{-1})^{2^{N-1}}(x) = (\phi_1)^{2^{N-1}}(x). \end{aligned}$$

最後の等式は, $(\phi_1)^{2^N} = id_M$ を用いた. よって, $(\phi_1)^{2^{N-1}}(x) \in L$. □

これより, $u(s,0) \in L,\ u(s,1) \in \phi_1(L)$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \left((\phi_1)^{2^{N-1}}u\right)(s,0) &= (\phi_1)^{2^{N-1}}(u(s,0)) \in (\phi_1)^{2^{N-1}}(L) = L, \\ \left((\phi_1)^{2^{N-1}}u\right)(s,1) &= (\phi_1)^{2^{N-1}}(u(s,1)) \in (\phi_1)^{2^{N-1}+1}(L) = \phi_1(L) \end{aligned}$$

となり, $(\phi_1)^{2^{N-1}}u$ の境界条件が満たされる.

ここで, $(\phi_1)^{2^{N-1}}u \neq u$ ならば $\tilde{u} := (\phi_1)^{2^{N-1}}u$ とおくと, $(\phi_1)^{2^{N-1}}\tilde{u} = u$ となり,

$$u, \tilde{u} \in \hat{\mathcal{M}}^{(N-1)}_{J,\phi}(p,q) = \left\{u \in \hat{\mathcal{M}}_{J,\phi}(p,q) \middle| u \neq (\phi_1)^{2^{N-1}}u\right\}.$$

つまり, $\hat{\mathcal{M}}^{(N-1)}_{J,\phi}(p,q)$ 上には $(\phi_1)^{2^{N-1}}$ から誘導される自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用が入る.

以下, $(\phi_1)^{2^{N-1}}u = u$ の場合を考える. このとき, $(\phi_1)^{2^{N-2}}u \in \hat{\mathcal{M}}_{J,\phi}(p,q)$ を示す.

$$\left((\phi_1)^{2^{N-1}}u\right)(s,0) = u(s,0) \in L, \tag{4}$$

$$\left((\phi_1)^{2^{N-1}}u\right)(s,1) = u(s,1) \in \phi_1(L) \tag{5}$$

に注意する. 無限遠の条件は, 対蹠集合の性質から前のステップと同じである. 次に,

主張. $\tau\left((\phi_1)^{2^{N-2}}(u(s,0))\right) = (\phi_1)^{2^{N-2}}(u(s,0))$. すなわち, $\left((\phi_1)^{2^{N-2}} \circ u\right)(s,0) \in L$ が成り立つ.

(証). $u(s,0) \in L$ であるから,

$$\begin{aligned} \tau\left((\phi_1)^{2^{N-2}}(u(s,0))\right) &= (\tau(\phi_1)^{2^{N-2}}\tau)u(s,0) \\ &= (\tau\phi_1\tau)^{2^{N-2}}u(s,0) \\ &= (\phi_1^{-1})^{2^{N-2}}u(s,0) \\ &= (\phi_1^{-1})^{2^{N-2}}(\phi_1)^{2^{N-1}}u(s,0) \quad ((4) \text{ より}) \\ &= (\phi_1)^{2^{N-2}}u(s,0). \end{aligned}$$

□

また, $(\phi_1)^{2^{N-2}}(u(s,1)) \in \phi_1(L)$ が成り立つことを示す.

主張. $(\phi_1)^{2^{N-2}-1}(u(s,1)) \in L$.

(証). $(\phi_1)^{-1}(u(s,1)) \in L$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
\tau\left((\phi_1)^{2^{N-2}-1}(u(s,1))\right) &= \tau(\phi_1)^{2^{N-2}}(\phi_1)^{-1}(u(s,1)) \\
&= \tau(\phi_1)^{2^{N-2}}\tau(\phi_1)^{-1}(u(s,1)) \\
&= (\tau\phi_1\tau)^{2^{N-2}}(\phi_1)^{-1}(u(s,1)) \\
&= (\phi_1^{-1})^{2^{N-2}}(\phi_1)^{-1}(u(s,1)) \\
&= (\phi_1^{-1})^{2^{N-2}+1}(\phi_1)^{2^{N-1}}(u(s,1)) \quad \text{((5) より)} \\
&= (\phi_1)^{2^{N-2}-1}(u(s,1)).
\end{aligned}$$

□

よって, $(\phi_1)^{2^{N-2}}u \in \hat{\mathcal{M}}_{J,\phi}(p,q)$. もし, $(\phi_1)^{2^{N-2}}u \neq u$ ならば $\tilde{u} := (\phi_1)^{2^{N-2}}u$ とおくと,

$$(\phi_1)^{2^{N-2}}\tilde{u} = (\phi_1)^{2^{N-1}}u = u$$

かつ

$$(\phi_1)^{2^{N-1}}\tilde{u} = (\phi_1)^{2^{N-1}}\left((\phi_1)^{2^{N-2}}u\right) = (\phi_1)^{2^{N-2}}\left((\phi_1)^{2^{N-1}}u\right) = (\phi_1)^{2^{N-2}}u = \tilde{u}$$

となるから,

$$u, \tilde{u} \in \hat{\mathcal{M}}^{(N-2)}_{J,\phi}(p,q)$$

となり, この空間には $(\phi_1)^{2^{N-2}}$ から誘導される自由な $\mathbb{Z}_2$ 作用が入る. したがって, 以下, $(\phi_1)^{2^{N-2}}u = u$ の場合を考えればよい.

この操作を繰り返すと, 最後には $(\phi_1)^2u \in \hat{\mathcal{M}}_{J,\phi}(p,q)$ となるが, このときは必ず

$$(\phi_1)^2u \neq u$$

となる. なぜなら, ϕ_1 は M の正則等長変換の 1 パラメータ部分群の time-1 map でありかつ十分小さく取っていたから (N が十分大). □

命題 6 より、$\mathcal{M}_J(L, \phi_1(L) : p, q)$ の 0 次元部分は偶数個の要素をもち、境界作用素の定義から

$$\partial(p) = \sum_{q \in L_0 \cap L_1} n(p,q) \cdot q = 0.$$

つまり、交叉 (3) が Floer ホモロジー $HF(L; \mathbb{Z}_2)$ の生成元を与える。

定理 7. (G, K) をコンパクト型対称対とし、$(M = \mathrm{Ad}(G)x_0, J, \omega)$ を複素旗多様体で、計量 $\omega(\cdot, J\cdot)$ が Kähler-Einstein であるものとする。$L = \mathrm{Ad}(K)x_0$ を M の実旗多様体とする。このとき、

$$HF(L; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^{\#W(G,K)x_0} = (\mathbb{Z}_2)^{SB(L;\mathbb{Z}_2)}$$

が成り立つ。$SB(L, \mathbb{Z}_2)$ は L の $\mathbb{Z}_2$ 係数の Betti 数の総和を表す。

系 8. 定理 7 の設定で、L と φL が横断的に交わるような M の任意の Hamilton 微分同相写像 $\varphi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ について、不等式

$$\#(L \cap \varphi L) \geq \#W(G, K)x_0 = SB(L, \mathbb{Z}_2)$$

が成り立つ。

系 8 は、[3, Section 15] の一般的な Arnold-Givental 不等式の極めて特別な場合と考えられる。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, *A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 273–297.

[2] J. J. Duistermaat, *Convexity and tightness for restrictions of Hamiltonian functions to fixed point sets of an antisymplectic involution*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), no. 1, 417–429.

[3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer Theory over Integers: Spherically Positive Symplectic Manifolds*, Pure and Applied Mathematics Quarterly (Special Issue: In honor of Dennis Sullivan, Part 2 of 2) **9** no.2 (2013), 189–289.

[4] O. Ikawa, M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The fixed point set of a holomorphic isometry, the intersection of two real forms in a Hermitian symmetric space of compact type and symmetric triads*, Int. J. Math. **26** no. 5 (2015) 1541005 [32 pages].

[5] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan **65** no.4 (2013), 1135–1151.

[6] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, *On the structure of the intersection of real flag manifolds in a complex flag manifold*, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics.

[7] 松木敏彦, Lie 群入門, 日本評論社 (2005)

[8] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I*, Comm. Pure Appl. Math. **46** (1993), 949–993; Addendum, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), 1299–1302.

[9] Y.-G. Oh, *Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, III: Arnold-Givental conjecture*, The Floer Memorial volume, Progr. Math., vol. 133, Birkhäuser, Basel (1995), 555–573.

[10] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type*, J. Math. Soc. Japan, **64** no.4 (2012), 1297–1332.

[11] M. S. Tanaka and H. Tasaki, *The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II*, J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 275–291.

[12] H. Tasaki, *The intersection of two real forms in the complex hyperquadric*, Tohoku Math. J. **62** (2010), 375–382.

Hiroshi Iriyeh
MATHEMATICS AND INFORMATICS, COLLEGE OF SCIENCE, IBARAKI UNIVERSITY
MITO, IBARAKI 310-8512, JAPAN
e-mail : hiroshi.irie.math@vc.ibaraki.ac.jp