古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合

田中 真紀子

東京理科大学理工学部

1 序論

コンパクト対称空間 M の部分集合 A は、A の任意の点 x における点対称 s_x が A の各点を固定するときに対蹠集合とよばれる。s_x は x を孤立不動点として持つので、対蹠集合は離散的であり、したがって有限集合である。この対蹠集合の定義は Chen–Nagano[1] で与えられた。彼らはコンパクト Lie 群の 2-rank（可換部分群 $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ の階数の最大値）のある意味拡張となる 2-number（対蹠集合の位数の最大値）について詳細に研究し、ほぼすべてのコンパクト対称空間の 2-number を決定している。[1] で 2-number が扱われていない有向実 Grassmann 多様体に関しては Tasaki[9, 10, 11, 12] の研究があるが、一般の場合の有向実 Grassmann 多様体の 2-number はまだ知られていない。[1] において Chen-Nagano の研究の興味は主に M の 2-number と M の位相的性質との関連にあったと思われる。一方、M に存在し得る極大な対蹠集合を等長変換群の作用を除いて決定することは、対蹠集合に関する基本的問題であり、その結果は M の対称空間構造と深い関係があると考えられる。著者は田崎博之氏と共同でコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類に取り組んでいる。[8] において古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の分類を行った。現在は、この結果を利用して、古典型コンパクト対称空間およびその商空間の極大対蹠集合の分類を進めており、この記録集では、$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ として、$\mathbb{K}^n$ 内の k 次元 $\mathbb{K}$ 部分空間全体からなる Grassmann 多様体 $G_k(\mathbb{K}^n)$ および $G_n(\mathbb{K}^{2n})/\mathbb{Z}_2$、$CI(n) = Sp(n)/U(n)$、$CI(n)/\mathbb{Z}_2$, $DIII(n) = SO(2n)/U(n)$, $DIII(n)/\mathbb{Z}_2$ (n は偶数) の極大対蹠集合の分類結果について述べる。

2 コンパクト対称空間の対蹠集合

M をコンパクト Riemann 対称空間（以下では単にコンパクト対称空間とよぶ）とする。$x \in M$ における点対称を s_x で表すと、s_x は M の対合的等長変換で、x は s_x の孤立不動点である。$A \subset M$ が、任意の $x, y \in A$ に対して $s_x(y) = y$ を満たすとき、A は**対蹠集合 (an antipodal set)** とよばれる。対蹠集合は有限集合であ

る。M が連結のときには、対蹠集合の任意の異なる 2 点はある閉測地線上で対蹠的である。包含関係について極大な対蹠集合を極大対蹠集合とよぶ。例えば、$\mathbb{R}^{n+1}$ の単位超球面 S^n の任意の点 x に対して $\{x, -x\}$ は極大対蹠集合である。$\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底 $e_1, \ldots, e_{n+1}$ に対して $\{\langle e_1\rangle_{\mathbb{R}}, \ldots, \langle e_{n+1}\rangle_{\mathbb{R}}\}$ は n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ の極大対蹠集合である。

連結コンパクト対称空間 M の等長変換 f に対して $f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$ が任意の $x \in M$ に対して成り立つので、A が M の対蹠集合ならば $f(A)$ も M の対蹠集合である。M の 2 つの部分集合は、M の等長変換群 $I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ の元で写り合うとき、$I_0(M)$ **合同**（あるいは、単に**合同**）であるという。一般には、極大対蹠集合は合同を除いて一意であるとは限らないが、M が対称 R 空間の場合にはこれが成立する [5]。

対蹠集合に関して興味深い事実は、コンパクト型 Hermite 対称空間の 2 つの実形が離散的に交わるならば、その交叉は対蹠集合であり、特に、2 つの実形が合同ならば交叉は極大対蹠集合になることである [4, 6, 7]。Iriyeh–Sakai–Tasaki [3] はこの結果を利用してコンパクト型 Hermite 対称空間のラグランジアン Fleor ホモロジーを決定した。

N をコンパクト対称空間 M の全測地的部分多様体とすると、任意の $x \in N$ に対して、s_x は N を保ち、s_x の N への制限は N の点対称になり、N は対称空間である。このとき、A が N の対蹠集合ならば、A は M の対蹠集合でもある。また、M の対蹠集合 A' に対して $A' \cap N$ は N の対蹠集合である。

M, M' がコンパクト対称空間で、有限被覆写像 $\pi : M \to M'$ が存在し、任意の $x \in M$ に対して $\pi \circ s_x = s_{\pi(x)} \circ \pi$ が成り立つとする。このとき、A が M の対蹠集合ならば、$\pi(A)$ は M' の対蹠集合である。逆は一般には成立しない。

3 古典型コンパクト Lie 群の商群の極大対蹠部分群の分類

G をコンパクト Lie 群とし、e を G の単位元とする。G には両側不変 Riemann 計量が存在し、Riemann 対称空間になる。$x \in G$ における点対称 s_x は $s_x(y) = xy^{-1}x\ (y \in G)$ である。A を G の対蹠集合とする。左移動と右移動は G の等長変換であり、$e \in A$ と仮定しても一般性を失わない。このとき、任意の $x \in A$ に対して $s_e(x) = x^{-1} = x$、すなわち、$x^2 = e$ が成り立つ。さらに、任意の $x, y \in A$ に対して、$s_x(y) = y$ が成立するための必要十分条件は x と y が可換なことである。A が極大対蹠集合ならば、A は部分群になり、よって、A は $\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型な可換部分群である。したがって、コンパクト Lie 群 G の極大対蹠集合の $I_0(G)$ 合同類の分類は、極大対蹠部分群の共役類の分類に帰着され、さらにそれは、$\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ と同型な可換部分群の共役類の分類に帰着される。これについては、先行研究 [2, 13] がある。[8] では、G が $U(n), SU(n), Sp(n), O(n), SO(2n)$ の商群の場合に、極大対

蹠部分群の共役類の分類を、行列を用いた代表元の具体的表示を与えることにより行った。以下にその結果を引用する。そのために必要な記号等の準備をする。

正方行列からなる集合 X に対して、$X^{\pm} := \{x \in X \mid \det x = \pm 1\}$ と定める。

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

とおくと、Δ_n は $U(n), O(n), Sp(n)$ の共役を除いてただ一つの極大対蹠部分群である。Δ_n^+ は $SU(n), SO(n)$ の共役を除いてただ一つの極大対蹠部分群である。1_m で m 次単位行列を表す。$n = 2n'$ のとき、

$$I_{n'} := \begin{bmatrix} -1_{n'} & \\ & 1_{n'} \end{bmatrix}, \quad J_{n'} := \begin{bmatrix} & -1_{n'} \\ 1_{n'} & \end{bmatrix}, \quad K_{n'} := \begin{bmatrix} & 1_{n'} \\ 1_{n'} & \end{bmatrix} \in O(n)$$

とおく。

$$D[4] := \{\pm 1_2, \pm I_1, \pm J_1, \pm K_1\} \subset O(2)$$

は正方形を不変にする二面体群である。

$$Q[8] := \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$$

は四元数群である。ここで、$1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は四元数全体 $\mathbb{H}$ の標準的基底である。$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ を 2 次正方行列、B を n 次正方行列とするとき、$A \otimes B$ は次で与えられる $2n$ 次正方行列である。

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}$$

A, B が複素行列の場合には、$\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^2$ が成り立つ。自然数 n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の k 乗と奇数 l の積に分解し、$0 \leq s \leq k$ を満たす自然数 s に対して

$$D(s, n) := \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n)$$

とおく。

$U(n)$ の中心は $\{\alpha 1_n \mid \alpha \in U(1)\}$ であり、これを $U(1)$ と同一視する。自然数 μ に対して、$\mathbb{Z}_\mu$ を $U(1)$ に含まれる μ 次巡回群とする。このとき、$U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ はコンパクト Lie 群であり、自然な射影 $\pi_n : U(n) \to U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は μ 重被覆準同型写像である。$SU(n)$ の中心は $\{\alpha 1_n \mid \alpha^n = 1\}$ であり、これを $\mathbb{Z}_n$ と同一視する。自然数 μ が n を割り切るとき、$SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ はコンパクト Lie 群であり、自然な射影 $\pi_n : SU(n) \to SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ は μ 重被覆準同型写像である。

以下の定理において、次は共通とする。n を $n = 2^k \cdot l$ と 2 の k 乗と奇数 l の積に分解する。θ を 1 の原始 2μ 乗根とする。

定理 3.1 [8] $U(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}D(0,n)) = \pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n)$$

(2) n,μ が偶数の場合、

$$\pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \quad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。

注意 3.2 $\Delta_2 \subsetneq D[4]$ より $D(k-1,2^k) \subsetneq D(k,2^k)$ となるので $(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合は除外される。

定理 3.3 [8] $SU(n)/\mathbb{Z}_\mu$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

(1) n または μ が奇数の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+).$$

(2) n,μ が偶数の場合、

(a) $k=1$ のとき、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n((D^+[4] \cup \theta D^-[4]) \otimes \Delta_l)$$

ただし、$n=\mu=2$ のとき $\pi_2(\Delta_2^+ \cup \theta\Delta_2^-)$ は除外する。

(b) $k \geq 2$ のとき、$\mu = 2^{k'} \cdot l'$ (l' : 奇数) と表示すると $1 \leq k' \leq k$ で l' は l を割り切り、

(b1) $k' = k$ ならば、

$$\pi_n(\Delta_n^+ \cup \theta\Delta_n^-), \quad \pi_n(D(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合は除外する。

(b2) $1 \leq k' < k$ ならば、

$$\pi_n(\{1,\theta\}\Delta_n^+), \quad \pi_n(\{1,\theta\}D(s,n)) \quad (1 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1,2^k)$ の場合は除外し、さらに、$n=4$ のときには $\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$ も除外する。

注意 3.4 $\Delta_4^+ = \Delta_2 \otimes \Delta_2 \subsetneq D[4] \otimes D[4] = D(2,4)$ より $\pi_4(\{1,\theta\}\Delta_4^+)$ は除外される。

定理 3.5 [8] $\tilde{G} = O(n), SO(n), Sp(n)$ とし、それぞれに対応して、$G = O(n)/\{\pm 1_n\}$, $SO(n)/\{\pm 1_n\}$, $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ とする。ただし、$\tilde{G} = SO(n)$ の場合には n は偶数とする。$\pi_n : \tilde{G} \to G$ を自然な射影とする。

(I) $O(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\pi_n(D(s,n)) \quad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。

(II) n は偶数とする。$SO(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠は次のいずれかに共役である。

(1) $k = 1$ の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+), \quad \pi_n(D^+[4] \otimes \Delta_l)$$

ただし、$n = 2$ のとき $\pi_2(\Delta_2^+)$ は除外する。

(2) $k \ge 2$ の場合、

$$\pi_n(\Delta_n^+), \quad \pi_n(D(s,n)) \quad (1 \le s \le k)$$

ここで、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外し、さらに、$n = 4$ のとき $\pi_4(\Delta_4^+)$ も除外する。

(III) $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の極大対蹠部分群は次のいずれかに共役である。

$$\pi_n(Q[8] \cdot D(s,n)) \quad (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。

4 Grassmann 多様体とその商空間の極大対蹠集合の分類

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とし、

$$O(n,\mathbb{K}) = \begin{cases} O(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{R}) \\ U(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{C}) \\ Sp(n) & (\mathbb{K} = \mathbb{H}) \end{cases}$$

によって $O(n,\mathbb{K})$ を定める。$G_k(\mathbb{K}^n)$ を $\mathbb{K}^n$ 内の k 次元 $\mathbb{K}$ 部分ベクトル空間全体からなる Grassmann 多様体とすると $G_k(\mathbb{K}^n) = O(n,\mathbb{K})/O(k,\mathbb{K}) \times O(n-k,\mathbb{K})$ と表せる。$x \in G_k(\mathbb{K}^n)$ に対して、x に沿う鏡映 $\mathrm{id}_x - \mathrm{id}_{x^\perp} \in O(n,\mathbb{K})$ を対応させる写像

は、$G_k(\mathbb{K}^n)$ から $O(n,\mathbb{K})$ への埋め込みになる。$I_{k,n-k}=\begin{bmatrix}1_k & \\ & -1_{n-k}\end{bmatrix}$ とおく。このとき、上の埋め込みによる $G_k(\mathbb{K}^n)$ の像は

$$F(s_{1_n},O(n,\mathbb{K})) := \{x\in O(n,\mathbb{K}) \mid s_{1_n}(x)=x\} = \bigcup_{0\le k\le n}\{g\,I_{k,n-k}\,g^{-1} \mid g\in O(n,\mathbb{K})\}$$

の連結成分

$$\{g\,I_{k,n-k}\,g^{-1} \mid g\in O(n,\mathbb{K})\}$$

に一致し、$O(n,\mathbb{K})$ の単位元 $e=1_n$ に関する極地である。特に、$O(n,\mathbb{K})$ の全測地的部分多様体である。上述の埋め込みによる $G_k(\mathbb{K}^n)$ の像を $G_k(\mathbb{K}^n)$ と同一視すると、$x\in G_k(\mathbb{K}^n)$ における点対称は、$O(n,\mathbb{K})$ の点対称 s_x の $G_k(\mathbb{K}^n)$ への制限で与えられる。$O(n,\mathbb{K})$ の極大対蹠部分群は Δ_n に共役であり、

$$\begin{aligned}&G_k(\mathbb{K}^n)\cap\Delta_n\\ &\quad=\{\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\Delta_n \mid |\{i\mid\varepsilon_i=1\}|=k, |\{j\mid\varepsilon_j=-1\}|=n-k\} \qquad (*)\end{aligned}$$

となり、$G_k(\mathbb{K}^n)$ の極大対蹠集合はこれに $I_0(G_k(\mathbb{K}^n))$ 合同になる。$\mathbb{K}^n$ の標準的正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ をとると、$(*)$ は $\{\langle\boldsymbol{e}_{i_1},\dots,\boldsymbol{e}_{i_k}\rangle \mid 1\le i_1<\cdots<i_k\le n\}$ と見ることができる。

次に、Grassmann 多様体の商空間について考える。$G_m(\mathbb{K}^{2m})$ には直交補空間を対応させる対合的等長変換 $\gamma: G_m(\mathbb{K}^{2m})\to G_m(\mathbb{K}^{2m})\ ;\ x\mapsto x^\perp$ が定まり、この作用による商空間 $G_m(\mathbb{K}^{2m})^* := G_m(\mathbb{K}^{2m})/\{1,\gamma\}$ も対称空間になり、自然な二重被覆 $G_m(\mathbb{K}^{2m})\to G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$ が定まる。

$D(s,n)$ の元 d は $d^2=\pm 1_n$ を満たすので、

$$\begin{aligned}PD(s,n) &:= \{d\in D(s,n) \mid d^2=1_n\},\\ ND(s,n) &:= \{d\in D(s,n) \mid d^2=-1_n\}\end{aligned}$$

とおく。

定理 4.1 $G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$ の極大対蹠集合について次が成り立つ。

(1) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合、次のいずれかに $SO(2m)/\{\pm 1_{2m}\}$ 合同になる。

$$\pi_{2m}(\{d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0\in PD(s,2m) \mid \exists d_i\ (0\le i\le s)\ \operatorname{Tr} d_i=0\}) \qquad (0\le s\le k)$$

ただし、$(s,2m)=(k-1,2^k)$ の場合は除外する。

(2) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合、次のいずれかに $U(2m)/\{\pm 1_{2m}\}$ 合同になる。

$$\begin{aligned}&\pi_{2m}(\{d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0\in PD(s,2m) \mid \exists d_i\ (0\le i\le s)\ \operatorname{Tr} d_i=0\}\\ &\qquad\cup\sqrt{-1}ND(s,2m)) \qquad (0\le s\le k)\end{aligned}$$

ただし、$(s,2m)=(k-1,2^k)$ の場合は除外する。

(3) $\mathbb{K}=\mathbb{H}$ の場合、次のいずれかに $Sp(2m)/\{\pm 1_{2m}\}$ 合同になる。

$$\begin{aligned}&\pi_{2m}(\{d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0\in PD(s,2m)\mid \exists d_i\ (0\leq i\leq s)\ \mathrm{Tr}\, d_i=0\}\\ &\qquad\cup\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}ND(s,2m)) \qquad\qquad (0\leq s\leq k)\end{aligned}$$

ただし、$(s,2m)=(k-1,2^k)$ の場合は除外する。

証明は次の基本方針に沿って、$\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ のそれぞれの場合に議論を行う。

G をコンパクト Lie 群とし、M を G の e に関する極地、すなわち、$F(s_e,G)$ の連結成分の一つとする。$g\in G$ に対して I_g で g による共役が定める G の内部自己同型写像を表す。I_g は G の等長変換である。$x\in M$ とすると

$$M=\{I_g(x)\mid g\in G\}$$

が成り立つ。M の等長変換全体の成す Lie 群 $I(M)$ の単位連結成分 $I_0(M)$ は $I_0(M)=\{I_g|_M\mid g\in G\}$ と表せる。

M の対蹠集合 A をとる。$A\subset M\subset F(s_e,G)$ なので、$A\cup\{e\}$ は G の対蹠集合になる。$A\cup\{e\}$ を含む G の極大対蹠集合 $\tilde{A}$ をとると、$\tilde{A}$ は G の極大対蹠部分群になる。さらに A が M の極大対蹠集合ならば、

$$A=M\cap\tilde{A}$$

が成り立つ。

$$B_0,\ldots,B_k$$

を G の極大対蹠部分群の各共役類の代表とすると、ある $0\leq s\leq k$ と $g\in G$ が存在して

$$\tilde{A}=I_g(B_s)$$

が成り立つ。したがって、

$$A=M\cap\tilde{A}=M\cap I_g(B_s)=I_g(M\cap B_s)$$

となる。すなわち、A は M 内で $M\cap B_s$ と $I_0(M)$ 合同になる。これより、M 内の極大対蹠集合の $I_0(M)$ による合同類の代表の候補は

$$M\cap B_0,\ldots,M\cap B_k$$

である。

$G_m(\mathbb{K}^{2m})$ を $O(2m,\mathbb{K})$ 内で考えると $\gamma(x)$ は

$$1_{\gamma(x)}-1_x=-1_{2m}(1_x-1_{\gamma(x)})$$

に対応するため、$G_m(\mathbb{K}^{2m})^*\subset O(2m,\mathbb{K})/\{\pm 1_{2m}\}=O(2m,\mathbb{K})^*$ とみなせる。さらに、$G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$ は $O(2m,\mathbb{K})^*$ の $\pi_{2m}(1_{2m})$ に関する極地になる。$O(2m,\mathbb{K})$ から $O(2m,\mathbb{K})^*$ への自然な射影を π_{2m} で表すことにする。

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ の場合。$2m=2^k\cdot l$ (l は奇数) とする。$O(2m)^*$ の極大対蹠部分群は

$$\pi_{2m}(D(s,2m)) \qquad (0\le s\le k, (s,2m)=(k-1,2^k) \text{ を除く})$$

のいずれかに共役になる。したがって、$G_m(\mathbb{R}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は

$$\pi_{2m}(D(s,2m))\cap G_m(\mathbb{R}^{2m})^* \qquad (0\le s\le k, (s,2m)=(k-1,2^k) \text{ を除く})$$

のいずれかに合同になる。$O(2m)$ 内では

$$G_m(\mathbb{R}^{2m})=\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in O(2m)\}$$

となるので、$G_m(\mathbb{R}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は

$$\pi_{2m}\left(D(s,2m)\cap\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in O(2m)\}\right)$$
$$(0\le s\le k, (s,2m)=(k-1,2^k) \text{ を除く})$$

のいずれかに合同になる。行列の固有値とその重複度を、固有値の後に括弧付きで重複度を記すことにすると、

$$\begin{aligned}&D(s,2m)\cap\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in O(2m)\}\\ &=\{d\in D(s,2m)\mid d \text{ の固有値は } +1(m),\ -1(m)\}\end{aligned}$$

と表せる。簡単のため、

$$D_1(s,2m)=\{d\in D(s,2m)\mid d \text{ の固有値は } +1(m),\ -1(m)\}$$

と書くことにすると、正方行列 X,Y について $\mathrm{Tr}(X\otimes Y)=\mathrm{Tr}X\cdot\mathrm{Tr}Y$ が成り立つことから、

$$D_1(s,2m)=\{d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0\in PD(s,2m)\mid \exists d_i\ (0\le i\le s)\ \mathrm{Tr}d_i=0\}$$

となる。

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$ の場合。$2m=2^k\cdot l$ (l は奇数) とする。$U(2m)^*$ の極大対蹠部分群は

$$\pi_{2m}(\{1,\sqrt{-1}\}D(s,2m)) \quad (0\le s\le k, (s,2m)=(k-1,2^k) \text{ を除く})$$

のいずれかに共役になる。したがって、$G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は

$$\pi_{2m}(\{1,\sqrt{-1}\}D(s,2m))\cap G_m(\mathbb{C}^{2m})^* \quad (0\le s\le k, (s,2m)=(k-1,2^k) \text{ を除く})$$

のいずれかに合同になる。$U(2m)$ 内では

$$G_m(\mathbb{C}^{2m})=\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in U(2m)\}$$

となるので、$G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は

$$\pi_{2m}\left(\{1,\sqrt{-1}\}D(s,2m)\cap\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in U(2m)\}\right)$$
$$(0\leq s\leq k,(s,2m)=(k-1,2^k)\text{ を除く})$$

のいずれかに合同になる。このとき次を得る。

$$\begin{aligned}&\{1,\sqrt{-1}\}D(s,2m)\cap\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in U(2m)\}\\&=\{d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0\in PD(s,2m)\mid\exists d_i\ (0\leq i\leq s)\ \mathrm{Tr}d_i=0\}\\&\quad\cup\sqrt{-1}ND(s,2m)\end{aligned}$$

$\mathbb{K}=\mathbb{H}$ の場合。$2m=2^k\cdot l$ (l は奇数) とする。$Sp(2m)^*$ の極大対蹠部分群は

$$\pi_{2m}(Q[8]\cdot D(s,2m))\quad(0\leq s\leq k,(s,2m)=(k-1,2^k)\text{ を除く})$$

のいずれかに共役になる。したがって、$G_m(\mathbb{H}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は

$$\pi_{2m}(Q[8]\cdot D(s,2m))\cap G_m(\mathbb{H}^{2m})^*)\quad(0\leq s\leq k,(s,2m)=(k-1,2^k)\text{ を除く})$$

のいずれかに合同になる。$Sp(2m)$ 内では

$$G_m(\mathbb{H}^{2m})=\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in Sp(2m)\}$$

となるので、$G_m(\mathbb{H}^{2m})^*$ の極大対蹠集合は

$$\pi_{2m}\left(Q[8]\cdot D(s,2m)\cap\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in Sp(2m)\}\right)$$
$$(0\leq s\leq k,(s,2m)=(k-1,2^k)\text{ を除く})$$

のいずれかに合同になる。このとき次を得る。

$$\begin{aligned}&Q[8]\cdot D(s,2m)\cap\{gI_{m,m}g^{-1}\mid g\in Sp(2m)\}\\&=\{d_1\otimes\cdots\otimes d_s\otimes d_0\in PD(s,2m)\mid\exists d_i\ (0\leq i\leq s)\ \mathrm{Tr}d_i=0\}\\&\quad\cup\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}ND(s,2m)\end{aligned}$$

5 $CI(n)=Sp(n)/U(n)$ とその商空間の極大対蹠集合の分類

$CI(n):=\{g\in Sp(n)\mid g^2=-1_n\}$ と定めると、$g\in CI(n),a\in Sp(n)$ に対して、$(aga^{-1})^2=ag^2a^{-1}=-1_n$ となるので、$Sp(n)$ は共役作用により $CI(n)$ に作用し、$\mathbf{i}\in CI(n)$ におけるイソトロピー部分群は $U(n)$ と同型になり、$CI(n)\cong Sp(n)/U(n)$ となる。$CI(n)$ はコンパクト型既約 Hermite 対称空間である。Δ_n は

$Sp(n)$ の大対蹠部分群であり、$\mathbf{i}\Delta_n \subset CI(n)$ だから、$\mathbf{i}\Delta_n$ は $CI(n)$ の合同を除いて一意的な極大対蹠集合である。

次に、$CI(n)$ の商空間について考える。$CI(n)$ は -1_n の掛け算に関して閉じているので、$CI(n)^* = CI(n)/\{\pm 1_n\}$ を考えることができる。$Sp(n)^* = Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ とおくと、$CI(n)^* \subset Sp(n)^*$ となる。自然な射影を $\pi_n : Sp(n) \to Sp(n)^*$ で表す。

$Sp(n)$ において $CI(n)$ は中心体 $C(1_n, -1_n)$ に一致する。ここで、中心体 $C(1_n, -1_n)$ は 1_n と -1_n を結ぶ測地弧の中点全体からなる集合である。したがって、$CI(n)^*$ は $Sp(n)^*$ の $\pi_n(1_n)$ に関する極地になる。$CI(n)^*$ の極大対蹠集合 A をとると $\{\pi_n(1_n)\} \cup A$ は $Sp(n)^*$ の対蹠集合になる。$\{\pi_n(1_n)\} \cup A$ は $Sp(n)^*$ のある極大対蹠部分群に含まれる。したがって、分類結果より $n = 2^k \cdot l$, l : 奇数とすると、ある $g \in Sp(n)$, $0 \leq s \leq k$ が存在して

$$\{\pi_n(1_n)\} \cup A \subset \pi_n(gQ[8] \cdot D(s,n)g^{-1})$$

が成り立つ。これより

$$\{\pi_n(1_n)\} \cup \pi_n(g)^{-1} A \pi_n(g) \subset \pi_n(Q[8] \cdot D(s,n))$$

となる。$\pi_n(g)^{-1} A \pi_n(g) \subset CI(n)^*$ であり、

$$\pi_n(g)^{-1} A \pi_n(g) \subset \pi_n(Q[8] \cdot D(s,n)) \cap CI(n)^*$$

を得る。この右辺は $CI(n)^*$ の対蹠集合であり、A の極大性より

$$\begin{aligned} \pi_n(g)^{-1} A \pi_n(g) &= \pi_n(Q[8] \cdot D(s,n)) \cap CI(n)^* \\ &= \pi_n(\{g \in Q[8] \cdot D(s,n) \mid g^2 = -1_n\}) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\{g \in Q[8] \cdot D(s,n) \mid g^2 = -1_n\} = ND(s,n) \cup \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} PD(s,n)$$

が成り立つことから次の定理を得る。

定理 5.1 $CI(n)^*$ の極大対蹠集合は次のいずれかに $Sp(n)^*$ 合同になる。

$$\pi_n(ND(s,n) \cup \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} PD(s,n)) \qquad (0 \leq s \leq k).$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除外する。

6 $DIII(n) = SO(2n)/U(n)$ とその商空間の極大対蹠集合の分類

$SO(2n)$ の $1_{2n}, -1_{2n}$ に関する中心体 $C(1_{2n}, -1_{2n}) = \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\}$ を考える。$SO(2n)$ の極大トーラス

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} R(\theta_1) & & \\ & \ddots & \\ & & R(\theta_n) \end{bmatrix} \middle| \theta_i \in \mathbb{R} \right\}, \quad R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

を取る。極大トーラスの性質より

$$C(1_{2n}, -1_{2n}) = \bigcup_{g \in SO(2n)} g\{t \in T \mid t^2 = -1_{2n}\}g^{-1}$$

であり、

$$\{t \in T \mid t^2 = -1_{2n}\} = \left\{ \begin{bmatrix} \pm J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm J_1 \end{bmatrix} \right\}$$

である。$SO(2n)$ の共役作用により上記の行列のブロックの置換はできる。さらに共役なものに置き換えることによって偶数個のブロックを -1 倍できる。したがって、$C(1_{2n}, -1_{2n})$ は

$$\begin{aligned} & C(1_{2n}, -1_{2n}) \\ &= \left\{ g \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1} \middle| g \in SO(2n) \right\} \cup \left\{ g \begin{bmatrix} -J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1} \middle| g \in SO(2n) \right\} \end{aligned}$$

と二つの連結成分の合併に分解される。これらは $\mathbb{R}^{2n}$ の二つの向きに応じた $\mathbb{R}^{2n}$ の直交複素構造全体の分解になっている。

$$DIII(n) =: \left\{ g \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1} \middle| g \in SO(2n) \right\} \subset C(1_{2n}, -1_{2n}) \subset SO(2n)$$

によって $DIII(n)$ を定めると、$DIII(n) \cong SO(2n)/U(n)$ である。ただし、

$$U(n) = \left\{ g \in SO(2n) \middle| g \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_1 \end{bmatrix} \right\}$$

である。$DIII(n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間である。

$$\alpha(g)=\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}g\begin{bmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}\quad(g\in SO(2n))$$

によって $SO(2n)$ の自己同型写像 α を定めると、

$$\alpha\left(\begin{bmatrix}\pm J_1&&&\\&J_1&&\\&&\ddots&\\&&&J_1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\mp J_1&&&\\&J_1&&\\&&\ddots&\\&&&J_1\end{bmatrix}$$

となり

$$\alpha(DIII(n))=\left\{g\begin{bmatrix}-J_1&&&\\&J_1&&\\&&\ddots&\\&&&J_1\end{bmatrix}g^{-1}\middle| g\in SO(2n)\right\}$$

したがって、$C(1_{2n},-1_{2n})$ の連結成分の合併への分解は

$$C(1_{2n},-1_{2n})=DIII(n)\cup\alpha(DIII(n))$$

となる。$C(1_{2n},-1_{2n})$ の元は 2 乗すると -1_{2n} になる直交行列なので、交代行列になる。この連結成分への分解は Pfaffian の値によって識別できる。$2n$ 次交代行列 X の Pfaffian $\mathrm{Pf}(X)$ は次のように定義される。S_{2n} で $\{1,2,\dots,2n\}$ の置換全体を表す。

$$F_{2n}=\{\sigma\in S_{2n}\mid \sigma(2i-1)<\sigma(2i)\ (1\le i\le n),\sigma(1)<\sigma(3)<\cdots<\sigma(2n-1)\}$$

によって S_{2n} の部分集合 F_{2n} を定める。$2n$ 次交代行列 $X=[a_{ij}]$ に対して

$$\mathrm{Pf}(X):=\sum_{\sigma\in F_{2n}}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)\sigma(2)}\cdots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

である。Pfaffian の定義より

$$\mathrm{Pf}\begin{bmatrix}\epsilon_1J_1&&\\&\ddots&\\&&\epsilon_nJ_1\end{bmatrix}=\epsilon_1\cdots\epsilon_n(-1)^n$$

となるので、$\mathrm{Pf}(DIII(n))=(-1)^n$, $\mathrm{Pf}(\alpha(DIII(n)))=(-1)^{n+1}$ となる。

$DIII(n)$ はコンパクト型 Hermite 対称空間なので、大対蹠集合が合同を除いて一意に定まる。

$$\Gamma_n := \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_1 J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_n J_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} \epsilon_i = \pm 1 \\ \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1 \end{matrix} \right\}$$

とおくと、$\Gamma_n \subset DIII(n)$ であり、

$$\begin{bmatrix} -J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -J_1 \end{bmatrix} \Gamma_n = \Delta_n^+ \otimes 1_2$$

が $SO(2n)$ の対蹠集合であることから、Γ_n は $DIII(n)$ の対蹠集合である。$|\Gamma_n| = 2^{n-1}$ であり、[1] により $DIII(n)$ の 2-number は 2^{n-1} であることから、Γ_n は $DIII(n)$ の大対蹠集合であり、特に極大対蹠集合である。

次に、$DIII(n)$ の商空間について考える。$\pi_n : SO(2n) \to SO(2n)^* = SO(2n)/\{\pm 1_{2n}\}$ を自然な射影とする。

n が奇数のときには、

$$-1_{2n} \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -J_1 \end{bmatrix} \in \alpha(DIII(n)),$$

$$-1_{2n} \begin{bmatrix} -J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & -J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -J_1 \end{bmatrix} \in DIII(n)$$

となることから、$SO(2n)$ を $\{\pm 1_{2n}\}$ で割るとき、$DIII(n)$ と $\alpha(DIII(n))$ は写り合い

$$\frac{SO(2n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \supset \frac{C(1_{2n}, -1_{2n})}{\{\pm 1_{2n}\}} \cong DIII(n)$$

が成り立つ。特にこの場合には $DIII(n)$ の被覆は現れない。

n が偶数の場合には、

$$-1_{2n} \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -J_1 \end{bmatrix} \in DIII(n),$$

$$-1_{2n} \begin{bmatrix} -J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & -J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -J_1 \end{bmatrix} \in \alpha(DIII(n))$$

となることから、$SO(2n)$ を $\{\pm 1_{2n}\}$ で割るとき、

$$\frac{SO(2n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \supset \frac{C(1_{2n}, -1_{2n})}{\{\pm 1_{2n}\}} = \frac{DIII(n)}{\{\pm 1_{2n}\}} \cup \frac{\alpha(DIII(n))}{\{\pm 1_{2n}\}}$$

が成り立つ。$DIII(n)$ は $SO(2n)$ の中心体 $C(1_n, -1_n)$ の連結成分の一つであるから、$DIII(n)^* := \pi_n(DIII(n)) = DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$ は $SO(2n)^*$ の $\pi_{2n}(1_{2n})$ に関する極地になる。4 節で述べた基本方針を $DIII(n)^*$ に適用することができ、定理 3.5 (II) より

$$\pi_{2n}(\Delta_{2n}^+) \cap DIII(n)^*, \quad \pi_{2n}(D(s, 2n)) \cap DIII(n)^* \quad (1 \leq s \leq k)$$

を明らかにすればよい。$\pi_{2n}(g) \in DIII(n)^*$ を満たす $g \in SO(2n)$ は $g^2 = -1_{2n}$ となり、$\pi_{2n}(\Delta_{2n}^+) \cap DIII(n)^* = \emptyset$ がわかる。したがって、$1 \leq s \leq k$ のときの $\pi_{2n}(D(s, 2n)) \cap DIII(n)^*$ について考えればよい。

$$\begin{aligned}
&\pi_{2n}(D(s, 2n)) \cap DIII(n)^* \\
&= \pi_{2n}(D(s, 2n) \cap DIII(n)) \\
&= \pi_{2n}(\{d \in D(s, 2n) \mid d \text{ は } 1_n \otimes J_1 \text{ に } SO(2n) \text{ 共役 }\}) \\
&= \pi_{2n}(\{d \in D(s, 2n) \mid d^2 = -1_{2n},\ \mathrm{Pf}(d) = (-1)^n\}) \\
&= \pi_{2n}(\{d \in D(s, 2n) \mid d^2 = -1_{2n},\ \mathrm{Pf}(d) = 1\})
\end{aligned}$$

となる。ここで、最後の等号は n が偶数であることから従う。この最後の集合を詳細に調べることにより次の結果を得る。

定理 6.1 $DIII(n)^*$ (n : 偶数) の極大対蹠集合は次のいずれかに $SO(2n)^*$ 合同になる。

(1) $n = 2$ の場合、

$$\{\pi_4(J_1 \otimes I_1), \pi_4(J_1 \otimes K_1), \pi_4(1_2 \otimes J_1)\}$$

(2) $n = 4$ の場合、

$$\begin{aligned}
&\pi_8(ND(3, 8)) \\
&= \{\pi_8(J_1 \otimes J_1 \otimes J_1)\} \cup \\
&\{\pi_8(J_1 \otimes d_1 \otimes d_2), \pi_8(d_1 \otimes J_1 \otimes d_2), \pi_8(d_1 \otimes d_2 \otimes J_1) \mid d_1, d_2 \in \{1_2, I_1, K_1\}\}
\end{aligned}$$

(3) $n = 4m + 2\,(m \geq 1)$ の場合、

$$\begin{aligned}
&\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^-\}, \\
&\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d_1 \otimes d_0) \mid d_1 \in \{I_1, K_1\}, d_0 \in \Delta_{2m+1}\} \\
&\cup \{\pi_{2n}(1_2 \otimes J_1 \otimes d_0) \mid d_0 \in \Delta_{2m+1}\}
\end{aligned}$$

(4) $n = 4m\,(m \geq 2)$ の場合、

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^+\},$$
$$\pi_{2n}(ND(s, 2n)) \quad (2 \leq s \leq k+1)$$

ただし、$(s, 2n) = (k, 2^{k+1})$ の場合は除外される。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., **308** (1988), 273–297.

[2] R. L. Griess Jr, Elementary abelian p-subgroups of algebraic groups, Geom. Dedicata, **39** (1991), 253-305.

[3] H. Iriyeh, T. Sakai and H. Tasaki, Lagrangian Floer homology of a pair of real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), 1135–1151.

[4] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. of Japan, **64** (2012), 1297–1332.

[5] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math., **50** (2013), 161–169.

[6] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 275–291.

[7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Correction to: "The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type", J. Math. Soc. Japan, **67** (2015), 1161–1168.

[8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Maximal antipodal subgroups of some compact classical Lie groups, J. Lie Theory, **27** (2017), 801–829.

[9] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented Grassmann manifolds, Internat. J. Math., **24** (2013), 1350061–1–28.

[10] H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 106, Y.J. Suh et al. (eds.), ICM Satellite Conference on "Real and Complex Submanifolds", (2014), 515–524.

[11] H. Tasaki, Estimates of antipodal sets in oriented real Grassmann manifolds, "Global Analysis and Differential Geometry on Manifolds," (special issue: the Kobayashi memorial volume), Internat. J. Math., **26** (2015), 1541008–1–12.

[12] H. Tasaki, Sequences of maximal antipodal sets of oriented real Grassmann manifolds II, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 203, Y.J. Suh et al. (eds.), "Hermitian-Grassmannian Submanifolds", (2017), 17–26.

[13] J. Yu, Elementary abelian 2-subgroups of compact Lie groups, Geom. Dedicata, **167** (2013), 245-293.