古典型コンパクト対称空間の極大対蹠集合

田中 真紀子（東京理科大学）

研究集会「部分多様体幾何とリー群作用**2018**」

2018年**9**月**3**日–**4**日

東京理科大学森戸記念館

田崎博之先生との共同研究

1. **Introduction**
2. 古典型コンパクト**Lie**群の極大対蹠部分群
3. 分類の基本方針
4. **Grassmann**多様体とその商空間の極大対蹠集合
5. $CI(n)$とその商空間の極大対蹠集合
6. $DIII(n)$とその商空間の極大対蹠集合
7. $UI(n), UII(n), AI(n), AII(n)$について

1. Introduction

M: コンパクトRiemann対称空間

s_x: xにおける点対称

i.e., (i) s_x はMの等長変換, (ii) ${s_x}^2 = \mathrm{id}$, (iii) x はs_xの孤立不動点

$S \subset M$: 部分集合

S: 対蹠集合 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y \in S,\ s_x(y) = y$

Mの2-number $\#_2 M$

$\#_2 M := \max\{|S| \mid S \subset M$ 対蹠集合$\}$

S: 大対蹠集合 $\overset{\text{def}}{\iff} |S| = \#_2 M$

(Chen-Nagano 1988)

例 **(1)** $M = S^n \, (\subset \mathbb{R}^{n+1})$

$x \in S^n$ に対して $\{x, -x\}$ は大対蹠集合，$\#_2 S^n = 2$

(2) $M = \mathbb{R}P^n$

$e_1, \ldots, e_{n+1}$： $\mathbb{R}^{n+1}$ の正規直交基底

$\{\langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}, \ldots, \langle e_{n+1} \rangle_{\mathbb{R}}\}$： 大対蹠集合，$\#_2 \mathbb{R}P^n = n+1$

(3) $M = U(n) \qquad s_x(y) = xy^{-1}x$

$s_{1_n}(y) = y \ \Leftrightarrow y^2 = 1_n \quad$ (1_n： 単位行列)

$x^2 = y^2 = 1_n \ \Rightarrow \ s_x(y) = y$ **iff** $xy = yx$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \text{： 大対蹠集合，} \#_2 U(n) = 2^n$$

一般には極大対蹠集合は大対蹠集合とは限らない

(田崎-T. 2013) 対称R空間Mに対して次が成立

(i) Mの任意の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる

(ii) Mの任意の二つの大対蹠集合は$I_0(M)$合同

(iii) Mの大対蹠集合は**Weyl**群の軌道

注意: $S^n, \mathbb{R}P^n, U(n)$は対称R空間

対称R空間Lは、あるコンパクト型**Hermite**対称空間Mの実形

i.e., $\exists \tau$: Mの対合的反正則等長変換 **s.t.**

$L = F(\tau, M) := \{x \in M \mid \tau(x) = x\}$ (連結)

(田崎-T. 2012)

M: コンパクト型**Hermite**対称空間

L_1, L_2: Mの実形，$L_1 \pitchfork L_2$

$\Rightarrow L_1 \cap L_2$はL_i $(i = 1, 2)$ の対蹠集合

さらに，L_1, L_2が合同ならば$L_1 \cap L_2$は大対蹠集合

Chen-Nagano は殆ど全てのコンパクト対称空間について$\#_2 M$を決定

証明では、一部、対蹠集合の構造を解析してはいるが、対蹠集合の元の個数の評価が主

目標：コンパクト対称空間 M の極大対蹠集合の分類、すなわち、M の極大対蹠集合の $I_0(M)$ 合同類を代表元の具体的表示を与えることにより分類する

既知の結果:古典型コンパクト**Lie**群 $G = U(n), SU(n)$, $O(n), SO(n), Sp(n)$ およびその商群 G/Γ（Γ は G の中心の部分群）、有向実**Grassmann**多様体 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n), k \leq 4$（$k = 3, 4$ の場合は田崎）、例外型コンパクト**Lie**群 G_2（田崎-保倉-**T.**）

M がコンパクト**Lie**群の場合は**Griess**，**Yu** による研究、M がコンパクト既約対称空間の場合は**Yu** による研究がある

2. 古典型コンパクトLie群の極大対蹠部分群

G: 両側不変計量をもつコンパクトLie群

$x \in G,\ s_x(y) = xy^{-1}x \quad (y \in G)$

e : Gの単位元

$s_e(y) = y \Leftrightarrow y^2 = e$

$x^2 = y^2 = e$のとき、$s_x(y) = y \Leftrightarrow xy = yx$

$e \in S \subset G$: 極大対蹠集合 $\Rightarrow$ Sは部分群

$$S \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{r} \qquad |S| = 2^r$$

$r \geq \mathrm{rank}(G)$（$r > \mathrm{rank}(G)$ も起こり得る）

$$\Delta_n := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} \subset O(n)$$

$$\Delta_n^{\pm} := \{ g \in \Delta_n \mid \det g = \pm 1 \}$$

$O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$の極大対蹠部分群（**MAS**）はΔ_nに共役であり、$SO(n)$, $SU(n)$の**MAS**はΔ_n^+に共役

$$D[4] := \left\{ \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{（二面体群）}$$

$$D^+[4] := \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$n = 2^k \cdot l,\ \ l$は奇数

$0 \leq s \leq k$なるsに対して

$$
\begin{aligned}
D(s,n) &:= \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{s} \otimes \Delta_{n/2^s} \subset O(n) \\
&= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \\
&\qquad \mid d_1, \ldots, d_s \in D[4], d_0 \in \Delta_{n/2^s}\}
\end{aligned}
$$

$$
Q[8] := \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}
$$

$$
\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1,
$$

$$
\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},\ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},\ \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}
$$

注意：$\Delta_2 \subsetneq D[4]$,

$$\Delta_4^+ = \Delta_2 \otimes \Delta_2 \subsetneq D[4] \otimes D[4] = D(2,4),$$

$$\begin{aligned} D(k-1, 2^k) &= \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes \Delta_2 \\ &\subsetneq \underbrace{D[4] \otimes \cdots \otimes D[4]}_{k-1} \otimes D[4] = D(k, 2^k) \end{aligned}$$

<u>定理 **1**</u>（田崎-T. 2017）

$\tilde{G} = O(n), SO(n), U(n), Sp(n)$

ただし、$\tilde{G} = SO(n)$ のとき n は偶数

$G = \tilde{G}/\{\pm 1_n\}$

$\pi_n : \tilde{G} \to G$ ： 自然な射影

(1) $O(n)/\{\pm 1_n\}$の**MAS**は次の何れかに共役

$$\pi_n(D(s,n)) \ (0 \le s \le k)$$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合は除く

(2) $SO(n)/\{\pm 1_n\}$の**MAS**は次の何れかに共役

$k=1$の場合　$\pi_n(\Delta_n^+)$, $\pi_n(D^+[4]\otimes\Delta_l)$

ただし、$n=2$のとき$\pi_2(\Delta_2^+)$は除く

$k\ge 2$の場合　$\pi_n(\Delta_n^+)$, $\pi_n(D(s,n))$ $(1\le s\le k)$

ただし、$(s,n)=(k-1,2^k)$の場合は除き、$n=4$のとき$\pi_4(\Delta_4^+)$も除く

(3) $U(n)/\{\pm 1_n\}$ の **MAS** は次の何れかに共役

n が奇数の場合　$\pi_n(\{1, \sqrt{-1}\}\Delta_n)$

n が偶数の場合　$\pi_n(\{1, \sqrt{-1}\}D(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く

(4) $Sp(n)/\{\pm 1_n\}$ の **MAS** は次の何れかに共役

$$\pi_n(Q[8] \cdot D(s,n)) \qquad (0 \leq s \leq k)$$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く

3. 分類の基本方針

定理**1**を利用して、コンパクト対称空間の極大対蹠部分集合を分類するための基本方針を述べる。

G: コンパクト**Lie**群　e: 単位元

M: $F(s_e, G) = \{g \in G \mid s_e(g) = g\}$の正次元の連結成分（$M$は$G$の$e$に関する極地）

$x \in M$に対して$s_x|_M$はMの点対称

$$M = \bigcup_{g \in G} gxg^{-1} = \bigcup_{g \in G} I_g(x)$$

ここで、I_gはgが定めるGの内部自己同型写像

$I_0(M) = \{I_g|_M \mid g \in G\}$

$A \subset M$を極大対蹠集合とする

$A \cup \{e\}$はGの対蹠集合

$\tilde{A}$: $A \cup \{e\}$を含むGの極大対蹠部分群

$A = M \cap \tilde{A}$

$B_0, B_1, \ldots, B_k$: Gの極大対蹠部部群の各共役類の代表

$0 \leq \exists s \leq k,\ \exists g \in G \quad$ **s.t.** $\tilde{A} = I_g(B_s)$

$A = M \cap I_g(B_s) = I_g(M \cap B_s)$

AはM内で$M \cap B_s$と$I_0(M)$合同

Mの極大対蹠集合の$I_0(M)$合同類の代表の候補は

$$M \cap B_0, M \cap B_1, \ldots, M \cap B_k$$

4．Grassmann多様体とその商空間の極大対蹠集合

$$O(n,\mathbb{K}) := \begin{cases} O(n) & (\mathbb{K}=\mathbb{R}) \\ U(n) & (\mathbb{K}=\mathbb{C}) \\ Sp(n) & (\mathbb{K}=\mathbb{H}) \end{cases}$$

$G_m(\mathbb{K}^n)$: $\mathbb{K}^n$内のm次元$\mathbb{K}$部分空間からなる**Grassmann**多様体（これは対称R空間）

$$G_m(\mathbb{K}^n) = O(n,\mathbb{K})/O(m,\mathbb{K}) \times O(n-m,\mathbb{K})$$

$G_m(\mathbb{K}^n) \ni x \mapsto \mathrm{id}_x - \mathrm{id}_{x^\perp} \in O(n,\mathbb{K})$の像$M$は

$$F(s_{1_n}, O(n,\mathbb{K})) = \bigcup_{0\le k\le n} \bigcup_{g\in O(n,\mathbb{K})} g \begin{bmatrix} 1_k & \\ & -1_{n-k} \end{bmatrix} g^{-1}$$

の連結成分（$k=m$）に一致し1_nに関する極地

$O(n, \mathbb{K})$の極大対蹠部分群はΔ_nに共役

$M \cap \Delta_n = \{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \Delta_n \mid$

$|\{i \mid \varepsilon_i = 1\}| = m, |\{j \mid \varepsilon_j = -1\}| = n - m\} \cdots (*)$

$M \cong G_m(\mathbb{K}^n)$の極大対蹠集合は$(*)$に合同

以下では、$n = 2m$の場合を考える。

$\gamma : G_m(\mathbb{K}^{2m}) \to G_m(\mathbb{K}^{2m}),\ \gamma(x) = x^\perp$

$G_m(\mathbb{K}^{2m})^* := G_m(\mathbb{K}^{2m})/\{\mathrm{id}, \gamma\}$

先述の埋め込みによる同一視のもとで$\gamma = -1_{2m}$

$G_m(\mathbb{K}^{2m})^* \subset O(2m, \mathbb{K})^* := O(2m, \mathbb{K})/\{\pm 1_{2m}\}$

$\pi_{2m} : O(2m, \mathbb{K}) \to O(2m, \mathbb{K})^*$ 自然な射影

$G_m(\mathbb{K}^{2m})^*$は$O(2m,\mathbb{K})^*$の$\pi_{2m}(1_{2m})$に関する極地

$n = 2^k \cdot l,\ l$は奇数，　$0 \leq s \leq k$

$d \in D(s,n)$ ならば $d^2 = \pm 1_n$

$PD(s,n) := \{d \in D(s,n) \mid d^2 = 1_n\}$

$ND(s,n) := \{d \in D(s,n) \mid d^2 = -1_n\}$

$G_m(\mathbb{R}^{2m})^* \cap \pi_{2m}(D(s,2m))$

$= \pi_{2m}(\underline{G_m(\mathbb{R}^{2m}) \cap D(s,2m)})$

下線部$= \{d \in D(s,2m) \mid d$の固有値は± 1で重複度$m\}$

$= \{d_1 \otimes \cdots \otimes d_s \otimes d_0 \in PD(s,2m) \mid$

$\exists d_i\,(0 \leq i \leq s)\ \mathrm{Tr} d_i = 0\} \cdots \clubsuit$

$2m = 2^k \cdot l,\ \ l$は奇数

以下で**MAS**は極大対蹠集合を表す

<u>定理 2</u> **(田崎-T.)** **(1)** $G_m(\mathbb{R}^{2m})^*$の**MAS**は次の何れかに合同 $\pi_{2m}(\clubsuit)\ (0 \leq s \leq k)$

ただし、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

(2) $G_m(\mathbb{C}^{2m})^*$の**MAS**は次の何れかに合同

$\pi_{2m}(\clubsuit \cup \sqrt{-1}ND(s, 2m))\ (0 \leq s \leq k)$

ただし、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

(3) $G_m(\mathbb{H}^{2m})^*$の**MAS**は次の何れかに合同

$\pi_{2m}(\clubsuit \cup \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}ND(s, 2m))\ (0 \leq s \leq k)$

ただし、$(s, 2m) = (k-1, 2^k)$の場合は除く

5. $CI(n)$とその商空間の極大対蹠集合

$CI(n) := \{x \in Sp(n) \mid x^2 = -1_n\}$

$Sp(n)$は共役により$CI(n)$に作用し$CI(n) = Sp(n)/U(n)$

（これはコンパクト型Hermite対称空間）

$\mathrm{i}\Delta_n \subset CI(n)$は$Sp(n)$の極大対蹠集合だから$CI(n)$の

極大対蹠集合、合同を除いて唯一

$Sp(n)^* := Sp(n)/\{\pm 1_n\}$

$\pi_n : Sp(n) \to Sp(n)^*$ 自然な射影

-1_nによる積は$CI(n)$を保つ

$CI(n)^* := \pi_n(CI(n)) = CI(n)/\{\pm 1_n\}$

$CI(n)^* \subset Sp(n)^*$ は $\pi_n(1_n)$ に関する極地

$CI(n)^* \cap \pi_n(Q[8] \cdot D(s,n))$

$= \pi_n(CI(n) \cap Q[8] \cdot D(s,n))$

$= \pi_n(\{g \in Q[8] \cdot D(s,n) \mid g^2 = -1_n\})$

$= \pi_n(ND(s,n) \cup \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} PD(s,n))$

<u>定理 3</u> **(田崎-T.)** $CI(n)^*$ の **MAS** は次の何れかに合同： $\pi_n(ND(s,n) \cup \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} PD(s,n))$ $(0 \leq s \leq k)$

ただし、$(s,n) = (k-1, 2^k)$ の場合は除く

6. $DIII(n)$とその商空間の極大対蹠集合

$$
\begin{aligned}
C &:= \{g \in SO(2n) \mid g^2 = -1_{2n}\} \\
&= \left\{ g \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1} \,\middle|\, g \in SO(2n) \right\} \\
&\qquad \cup \left\{ g \begin{bmatrix} -J_1 & & & \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_1 \end{bmatrix} g^{-1} \,\middle|\, g \in SO(2n) \right\}
\end{aligned}
$$

$$
J_1 := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$DIII(n) := \{g\,\mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_1)\,g^{-1} \mid g \in SO(2n)\}$

$= SO(2n)/U(n)$（コンパクト型**Hermite**対称空間）

α: $\mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1) \in O(2n)$による共役

$C = DIII(n) \cup \alpha(DIII(n))$

X : $2n$次交代行列　$\mathrm{Pf}(X)$: Xの**Pfaffian**

$\mathrm{Pf}(DIII(n)) = (-1)^n$, $\mathrm{Pf}(\alpha(DIII(n))) = (-1)^{n+1}$

$\Gamma_n := \{\mathrm{diag}(\epsilon_1 J_1, \ldots, \epsilon_n J_1) \mid \epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1\}$

$\Gamma_n \subset DIII(n)$は$SO(2n)$の対蹠集合

$\#_2 DIII(n) = 2^{n-1} = |\Gamma_n|$より$\Gamma_n$は$DIII(n)$の極大対蹠集合、合同を除いて唯一

$$SO(2n)^* = SO(2n)/\{\pm 1_{2n}\}$$

$\pi_{2n} : SO(2n) \to SO(2n)^*$ 自然な射影

<u>nが奇数の場合</u>

-1_{2n}による積で$DIII(n)$と$\alpha(DIII(n))$は写り合う

$$\pi_{2n}(DIII(n)) \cong DIII(n)$$

<u>nが偶数の場合</u>

-1_{2n}による積は$DIII(n), \alpha(DIII(n))$を各々保つ

$$\pi_{2n}(DIII(n)) = DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$$

nが偶数のとき

$DIII(n)^* := DIII(n)/\{\pm 1_{2n}\}$

これは$SO(2n)^*$の$\pi_{2n}(1_{2n})$に関する極地

$DIII(2)^* \cong \mathbb{R}P^2$

$DIII(4)^* \cong G_2(\mathbb{R}^8)$

nが6以上の偶数の場合を考える

$$I_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 4 **(田崎-T.)** $DIII(n)^*$（nは6以上の偶数）の**MAS**は次の何れかに合同

(1) $n = 4m + 2 \ (m \geq 1)$の場合

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^-\},$$

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d_1 \otimes d_0) \mid d_1 \in \{I_1, K_1\}, d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$$
$$\cup \{\pi_{2n}(1_2 \otimes J_1 \otimes d_0) \mid d_0 \in \Delta_{2m+1}\}$$

(2) $n = 4m \ (m \geq 2)$の場合

$$\{\pi_{2n}(J_1 \otimes d) \mid d \in \Delta_n^+\},$$

$$\pi_{2n}(ND(s, 2n)) \ (2 \leq s \leq k + 1)$$

ただし、$(s, 2n) = (k, 2^{k+1})$の場合は除く

7. $UI(n), UII(n), AI(n), AII(n)$について

$UI(n) \cong U(n)/O(n),\ \ AI(n) \cong SU(n)/SO(n)$

$UII(n) \cong U(2n)/Sp(n),\ AII(n) \cong SU(2n)/Sp(n)$

これらは外部型コンパクト対称空間

G：コンパクト連結**Lie**群

σ：Gの対合的自己同型写像

$M := \{g \in G \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$とおくと

$F(s_e, G \rtimes \{e, \sigma\}) = F(s_e, G) \cup M\sigma$ が成立

この事実を利用すると基本方針が使える