

# コンパクト対称空間の対蹠集合と部分多様体の交叉

田中 真紀子 (東京理科大学)

部分多様体の微分幾何学及び関連課題

—前田定廣先生還暦記念研究集会—

**2012年8月4日-6日 佐賀大学**

田崎博之氏（筑波大学）との共同研究

田崎:複素2次超曲面の2つの実形の交叉の研究 (**Tohoku Math.J., 2010**)

$Q_n(\mathbb{C})$  の実形  $(S^p \times S^{n-p})/\mathbb{Z}_2$  ( $0 \leq p \leq [n/2]$ ) に対して2つの  
実形の交叉を具体的に決定

交叉は (大) 対蹠集合でその個数は実形の **2-number** に一致

T.-田崎: 既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間の実形の交叉の研究 (**J.Math.Soc.Japan, to appear**)

コンパクト型 **Hermite** 対称空間の2つの実形の交叉は対蹠集合 (\*)

既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間の2つの実形の交点数を決定

→ **Floer** ホモロジーへの応用 (入江-酒井-田崎)

**T.-田崎 (in preparation)**

(\*)の証明の不備を修正

非既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間の2つの実形の交点数を決定

講演の内容

1. 準備
2. 非既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間の実形
3. 2つの実形の交叉

## 1. 準備

$M$  : **Riemann** 対称空間

$s_x$  :  $x \in M$  における点対称

$S \subset M$  : 対蹠集合  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x, y \in S, s_x(y) = y$

$M$  の 2-number  $\#_2 M$

$\#_2 M := \sup\{\#S \mid S \subset M : \text{対蹠集合}\}$

対蹠集合  $S$  は  $\#S = \#_2 M$  を満たすとき 大対蹠集合

- ・ **B.-Y.Chen** - 長野 (**Trans.A.M.S, 1988**) により導入
- ・  $\#_2 M < \infty$
- ・  $M$  が対称  $R$  空間ならば  $\#_2 M = \dim H_*(M, \mathbb{Z}_2)$  (竹内)

$$M = S^n (\subset \mathbb{R}^{n+1})$$

$$S = \{x, -x\} : \text{大対蹠集合}, \#_2 S^n = 2$$

$$M = \mathbb{R}P^n$$

$e_1, \dots, e_{n+1} : \mathbb{R}^{n+1}$  の標準基底

$$S = \{\mathbb{R}e_1, \dots, \mathbb{R}e_{n+1}\} : \text{大対蹠集合}, \#_2 \mathbb{R}P^n = n + 1$$

$$M = U(n)$$

$$S = \mathbf{diag}\{\pm 1, \dots, \pm 1\} : \text{大対蹠集合}, \#_2 U(n) = 2^n$$

$M$  : コンパクト **Riemann** 対称空間

$G$  :  $M$  の等長変換群の単位連結成分

$K$  :  $o \in M$  におけるイソトロピー部分群

$$F(s_o, M) = \{x \in M \mid s_o(x) = x\} = \bigcup_{j=0}^r M_j^+$$

ただし、 $M_0^+ = \{o\}$  とする。

各連結成分  $M_j^+$  は  $o$  に関する 極地 とよばれる。極地は  $K$ -軌道である。

$$M = S^n, \quad F(s_o, M) = \{o, -o\}$$

$$M = \mathbb{R}P^n, \quad o = \mathbb{R}e_1$$

$$F(s_o, M)$$

$$= \{o\} \cup \{\langle e_2, \dots, e_{n+1} \rangle \text{ の } 1 \text{次元部分空間全体}\} (\cong \mathbb{R}P^{n-1})$$

$M$  : **Hermite** 対称空間

$\tau$  :  $M$  の対合的反正則等長変換

$F(\tau, M)$  は連結全測地的 **Lagrange** 部分多様体で  $M$  の 実形 とよばれる。

既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間の実形の分類 : **Leung**, 竹内

既約でない場合の実形の分類 : **T.-田崎** (今回の結果)

$M = G_k(\mathbb{C}^n)$  :  $\mathbb{C}^n$  の  $k$  次元複素線形部分空間全体からなる **Grassmann** 多様体

$M$  の実形 :  $G_k(\mathbb{R}^n)$ ,

$G_l(\mathbb{H}^m)$  ( $k = 2l, n = 2m$  のとき),

$U(k)$  ( $n = 2k$  のとき)

## 2. 非既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間の実形

$M$  : **Hermite** 対称空間,  $\tau : M$  の反正則等長変換

写像  $M \times M \ni (x, y) \mapsto (\tau^{-1}(y), \tau(x)) \in M \times M$  は **Hermite**

対称空間  $M \times M$  の対合的反正則等長変換

これにより定まる実形は  $D_\tau(M) := \{(x, \tau(x)) \mid x \in M\}$

$D_\tau(M)$  を  $\tau$  により定まる  $M$  の 対角実形 とよぶ。

定理 2.1 (T.-田崎)

コンパクト型 **Hermite** 対称空間の実形は、既約因子の実形と既約因子から定まる対角実形の積になる。



## 定理 2.2 (T.-田崎)

$M = M_1 \times \cdots \times M_m$  : コンパクト型 **Hermite** 対称空間  $M$  の既約因子への分解

$L_1, L_2$  :  $M$  の実形

$$\implies L_i = L_{i,1} \times \cdots \times L_{i,n} \quad (i = 1, 2)$$

$L_{1,a}, L_{2,a}$  ( $1 \leq a \leq n$ ) の組み合わせは次のいずれか。

(1) ともに同じ既約因子の実形

(2) 必要なら  $M_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) を並べ替えて

$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \times N_{2s+1}$$

ただし、 $N_1 \subset M_1$ ,  $N_{2s+1} \subset M_{2s+1}$  は実形、 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq 2s$ ) は反正則等長写像

(3) 必要なら  $M_j (1 \leq j \leq m)$  を並べ替えて

$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times N_{2s},$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-3}}(M_{2s-3}) \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1})$$

ただし、 $N_1 \subset M_1$ ,  $N_{2s} \subset M_{2s}$  は実形、 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1} (1 \leq i \leq 2s - 1)$  は反正則等長写像

(4) 必要なら  $M_j (1 \leq j \leq m)$  を並べ替えて

$$D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1})$$

ただし、 $\tau_i : M_i \rightarrow M_{i+1} (1 \leq i \leq 2s - 1)$ ,  $\tau_{2s} : M_{2s} \rightarrow M_1$  は反正則等長写像

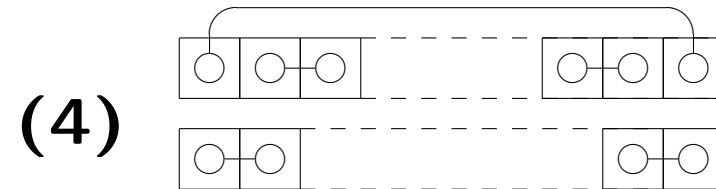
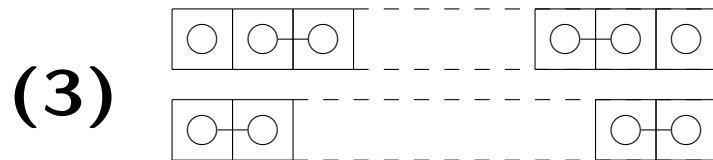
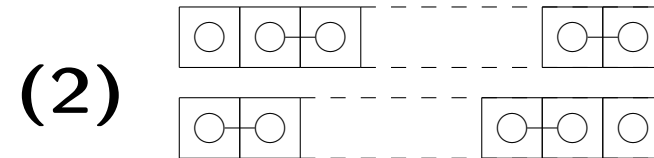
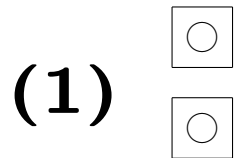
$\square$  : 既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間

$\square \circ$  : その実形

$\square \square$  : 2つの既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間の積

$\square \circ \square$  : 各既約因子の実形の積

$\square \circ \square \circ$  : 対角実形



### 3. 2つの実形の交叉

定理 3.1 (T.-田崎)

$M$  : コンパクト型 **Hermite** 対称空間

$L_1, L_2$  :  $M$  の実形, 交叉は離散的

$\implies$

$L_1 \cap L_2$  は  $L_1$  と  $L_2$  の対蹠集合

証明には竹内による極大トーラスの基本胞体に関する結果を用いる。  
非既約の場合の議論には、更に定理 2.2 から導かれる 2 つの実形の交叉に関する結果 (後で述べる) を用いる。

$M$  : コンパクト型 **Hermite** 対称空間

$A_0(M)$  :  $M$  の正則等長変換群の単位連結成分

$L_1, L_2$  :  $M$  の実形

$L_1$  と  $L_2$  は  $A_0(M)$  の元で互いに写り合うとき 合同 であるという。

定理 3.2 (T.-田崎)

$M$  : コンパクト型 **Hermite** 対称空間

$L_1, L_2$  :  $M$  の合同な実形, 交叉は離散的

$\implies$

$L_1 \cap L_2$  は  $L_1$  と  $L_2$  の大対蹠集合

i.e.,  $\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$

### 定理 3.3 (T.-田崎)

$M$  : 既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間

$L_1, L_2$  :  $M$  の実形, 交叉は離散的,  $\#_2 L_1 \leq \#_2 L_2$

$\implies$

(1)  $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}) (m \geq 2)$  で、 $L_1$  は  $G_m(\mathbb{H}^{2m})$  と合同、 $L_2$  は  $U(2m)$  と合同ならば

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2$$

(2) それ以外の場合

$$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 (\leq \#_2 L_2)$$

定理 3.2、定理 3.3 の証明には極地に関する数学的帰納法を用いる。

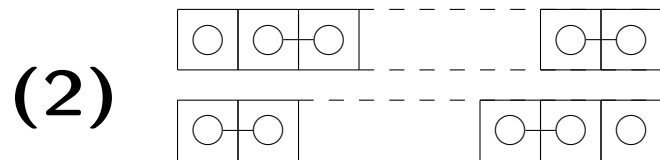
命題2.2で非既約コンパクト型Hermite対称空間 $M$ の2つの実形の組み合わせが4つの場合に帰着されることを示した。

$M = M_1 \times \cdots \times M_m$  :  $M$ の既約因子への分解

$L_1, L_2$  :  $M$ の実形,  $L_i = L_{i,1} \times \cdots \times L_{i,n}$  ( $i = 1, 2$ )

$L_{1,a}, L_{2,a}$  ( $1 \leq a \leq n$ )の組み合わせは(1)から(4)のいずれか。

(1)  $\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix} \implies$  既約の場合



$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \times N_{2s+1}$$

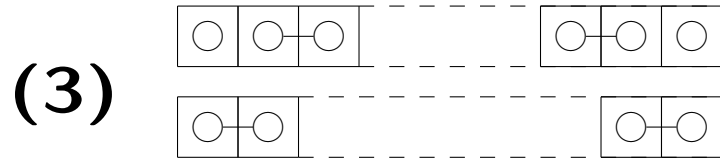
これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \dots, \tau_{2s}\tau_{2s-1} \cdots \tau_1(x)) \\ | x \in N_1 \cap (\tau_{2s}\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s+1})\}$$

$\implies$  既約の場合に帰着

注意：  $(\tau_{2s}\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s+1})$  は  $M_1$  の実形





$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times N_{2s},$$

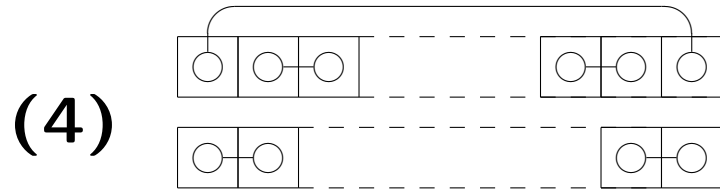
$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-3}}(M_{2s-3}) \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1})$$

これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \dots, \tau_{2s-1} \cdots \tau_1(x))$$

$$| x \in N_1 \cap (\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s})\}$$

$\implies$  既約の場合に帰着



$$D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1})$$

これらの交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \dots, \tau_{2s-1} \cdots \tau_1(x)) \\ | (x, \tau_{2s}^{-1}(x)) \in D_{\tau_{2s-1} \cdots \tau_1}(M_1) \cap D_{\tau_{2s}^{-1}}(M_1)\}$$

$\implies$  2つの対角実形の交叉

### 補題3.4 (村上, 竹内)

$M$  : 既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間

$I(M)$  :  $M$  の等長変換全体のなす群

$A(M)$  :  $M$  の正則等長変換全体のなす群

$I_0(M), A_0(M)$  :  $I(M), A(M)$  の単位連結成分

$\implies$

**(A)**  $M = Q_{2m}(\mathbb{C})(m \geq 2), G_m(\mathbb{C}^{2m})(m \geq 2)$

$$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad A(M)/A_0(M) \cong \mathbb{Z}_2$$

**(B)** それ以外の  $M$

$$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2, \quad A(M) = A_0(M)$$

### 命題 3.5 (T.-田崎)

$M$  : 既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間

$\implies$

$I(M) - A(M)$  の元はすべて反正則等長変換

対応  $I(M) - A(M) \ni \tau \mapsto D_\tau(M)$  により、

$I(M) - A(M)$  の連結成分と  $M \times M$  の対角実形の合同類は  
一対一に対応する。特に、**(A)** の  $M$  の積の対角実形の合同類は  
2つであり、**(B)** の  $M$  の積の対角実形の合同類は **1**つである。

注意 :  $g_1, g_2 \in A(M)$  に対して

$$(g_1, g_2)D_\tau(M) = D_{g_2\tau g_1^{-1}}(M)$$

### 定理 3.6 (T.-田崎)

$M$  : 既約コンパクト型 **Hermite** 対称空間

$\tau_1, \tau_2$  :  $M$  の反正則等長変換

$D_{\tau_1}(M), D_{\tau_2^{-1}}(M) \subset M \times M$  の交叉が離散的

$\implies$

(1)  $M = Q_{2m}(\mathbb{C})$  ( $m \geq 2$ ),  $\tau_2\tau_1 \notin A_0(M)$  ならば

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2m < 2m + 2 = \#_2 M$$

(2)  $M = G_m(\mathbb{C}^{2m})$  ( $m \geq 2$ ),  $\tau_2\tau_1 \notin A_0(M)$  ならば

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 M$$

(3) それ以外の場合

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = \#_2 M$$

## まとめ

コンパクト型 **Hermite** 対称空間  $M$  の 2 つの実形  $L_1, L_2$  の組み合わせは

- ・ 既約因子の 2 つの実形
- ・ 2 つの対角実形

の場合に帰着される。

$M$  : 既約  $\implies M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m}), \{L_1, L_2\} = \{G_m(\mathbb{H}^{2m}), U(2m)\}$   
の場合を除いて交点数は  $\min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}$  に一致

$M$  : 既約,  $L_1 = D_{\tau_1}(M), L_2 = D_{\tau_2^{-1}}(M)$  :  $M \times M$  の対角実形  
 $\implies M = Q_{2m}(\mathbb{C}), G_m(\mathbb{C}^{2m}), \tau_2 \tau_1 \notin A_0(M)$  の場合を除いて交点数は  $\#_2 M$  に一致