コンパクト対称空間の対蹠集合と部分多様体の交叉

田中 真紀子（東京理科大学）

本講演は筑波大学の田崎博之氏との共同研究に基づいている。

田崎は [10] で複素 2 次超曲面の 2 つの実形の交叉を具体的に記述し、それらが対蹠集合になっていることを発見した。田中-田崎 [7] では、田崎の結果を拡張して、コンパクト型 Hermite 対称空間の 2 つの実形の交叉が対蹠集合になることを示し、特に、2 つの実形が合同のときには交叉が大対蹠集合になることを示した。さらに、コンパクト型 Hermite 対称空間が既約の場合に、2 つの実形の交点数をすべて求めた。その後、実形の交叉の対蹠性の証明に不備があることがわかり、それを修正し、さらに、非既約なコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の分類、および、2 つの実形の交点数を調べたのが [9] である。今回の講演では主に [9] の内容についてお話ししたい。

1　準備

M を Riemann 対称空間とする。M の点 x における点対称を s_x で表す。M の部分集合 S は

$$\text{任意の } x, y \in S \text{ に対して } s_x(y) = y$$

を満たすとき**対蹠集合**とよばれる。M の **2-number** $\#_2 M$ は

$$\#_2 M := \sup\{\#S \mid S \text{ は } M \text{ の対蹠集合 }\}$$

で定義される。$\#_2 M$ は有限の値になることがわかる。対蹠集合 S が $\#S = \#_2 M$ を満たすとき、S を**大対蹠集合**とよぶ。大対蹠集合は極大な対蹠集合である（すなわち、それを真に含むような対蹠集合は存在しない）が、逆は一般に成立しない。これらの概念は Chen-長野 [1] で導入された。M がコンパクト連結 Lie 群の場合には、Borel-Serre によって導入された 2-rank $r_2(M)$ に対して $\#_2 M = 2^{r_2(M)}$ が成り立つことから “2-number” と名付けられたようである。

例えば、$M = U(n)$ の場合には $x, y \in U(n)$ に対して $s_x(y) = xy^{-1}x$ であり、

$$\{\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1) \in U(n)\}$$

は大対蹠集合で、$\#_2 M = 2^n$ である。

M をコンパクト Riemann 対称空間とし、G を M の等長変換群の単位連結成分とする。K を M の点 o におけるイソトロピー部分群とする。このとき、固定点集合 $F(s_o, M) := \{x \in M \mid s_o(x) = x\}$ の各連結成分は o に関する**極地**とよばれる。

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

と表す。ただし、各 M_j^+ は極地で、$M_0^+ = \{o\}$ とする。M_j^+ は K-軌道である。$M = U(n)$ の場合、$o = I$ (単位行列) に関する極地 M_j^+ $(0 \leq j \leq n)$ は

$$\begin{aligned} M_j^+ &= \{X \in U(n) \mid X \text{ は } \mathrm{diag}(-1, \ldots, -1, 1, \ldots, 1) \text{ に共役 } (-1 \text{ の個数は } j)\} \\ &\cong G_j(\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

である。ここで、$G_j(\mathbb{C}^n)$ は $\mathbb{C}^n$ の j 次元複素線形部分空間全体からなる Grassmann 多様体である。

M を Hermite 対称空間とし、τ を M の対合的反正則等長変換とする。このとき、$F(\tau, M)$ は連結であり、M の全測地的 Lagrange 部分多様体となる。$F(\tau, M)$ を M の**実形**とよぶ。既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形は Leung[2]、竹内 [6] によって分類されている。既約でないコンパクト型 Hermite 対称空間の実形の分類については次節で述べる。複素 Grassmann 多様体 $G_k(\mathbb{C}^n)$ は既約コンパクト型 Hermite 対称空間であり、その実形は

$$\begin{array}{ll} G_k(\mathbb{R}^n) & \\ G_l(\mathbb{H}^m) & (k = 2l, n = 2m) \\ U(k) & (n = 2k) \end{array}$$

である。

2 非既約コンパクト型 Hermite 対称空間の実形

M を Hermite 対称空間とし、τ を M の反正則等長変換とする。このとき、写像

$$M \times M \ni (x, y) \mapsto (\tau^{-1}(y), \tau(x)) \in M \times M$$

は $M \times M$ の対合的反正則等長変換であり、これにより定まる $M \times M$ の実形は

$$D_\tau(M) := \{(x, \tau(x)) \mid x \in M\}$$

である。$D_\tau(M)$ を τ により定まる M の**対角実形**とよぶ。M の正則等長変換 g_1, g_2 に対して $(g_1, g_2)D_\tau(M) = D_{g_2 \tau g_1^{-1}}(M)$ が成り立つ。

命題 2.1 ([9]) コンパクト型 Hermite 対称空間 M の実形は、M の既約因子の実形のいくつかと、M の既約因子の対角実形のいくつかの積である。

命題 2.2 ([9]) M を Hermite 対称空間、L_1, L_2 を M の実形とする。$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_m$ を M の既約因子への分解とする。このとき、L_1, L_2 は

$$L_1 = L_{1,1} \times L_{1,2} \times \cdots \times L_{1,n}, \quad L_2 = L_{2,1} \times L_{2,2} \times \cdots \times L_{2,n} \quad (1 \leq n \leq m)$$

と分解され、各 a $(1 \leq a \leq n)$ に対して $L_{1,a}$ と $L_{2,a}$ の組み合わせは次の (1) から (4) のいずれかである。

(1) ともに M のある同じ既約因子の実形

(2) 必要なら M の既約因子を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \to M_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2s+1)$ および実形 $N_1 \subset M_1$、$N_{2s+1} \subset M_{2s+1}$ によって定まる 2 つの実形

$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}) \times N_{2s+1}.$$

(3) 必要なら M の既約因子を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \to M_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2s)$ および実形 $N_1 \subset M_1$、$N_{2s} \subset M_{2s}$ によって定まる 2 つの実形

$$N_1 \times D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-2}}(M_{2s-2}) \times N_{2s},$$

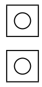
$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-3}}(M_{2s-3}) \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}).$$

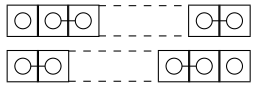
(4) 必要なら M の既約因子を並べ変え、反正則等長同型 $\tau_i : M_i \to M_{i+1}$ $(1 \leq i \leq 2s-1)$ および $\tau_{2s} : M_{2s} \to M_1$ によって定まる 2 つの実形

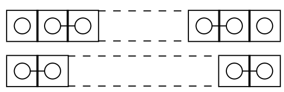
$$D_{\tau_2}(M_2) \times D_{\tau_4}(M_4) \times \cdots \times D_{\tau_{2s}}(M_{2s}),$$

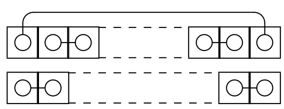
$$D_{\tau_1}(M_1) \times D_{\tau_3}(M_3) \times \cdots \times D_{\tau_{2s-1}}(M_{2s-1}).$$

既約コンパクト型 Hermite 対称空間を$\square$ で表し、その中の実形を$\boxed{\circ}$ で表す。2 つの既約コンパクト型 Hermite 対称空間の積を$\square\square$ で表し、各既約因子の実形の積を$\boxed{\circ}\boxed{\circ}$ で表し、対角実形を$\boxed{\circ\!-\!\circ}$ で表す。3 つ以上の既約コンパクト型 Hermite 対称空間内の実形についても同様に表す。このとき、命題2.2 の結果は次のように表すことができる。

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

3 二つの実形の交叉

コンパクト型 Hermite 対称空間の 2 つの実形 L_1, L_2 に対して、L_1 と L_2 が横断的に交わることと、L_1 と L_2 の交叉が離散的であることは同値である。

定理 3.1 ([7], [9]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とする。M の二つの実形 L_1, L_2 の交叉が離散的ならば、交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の対蹠集合になる。

証明には、竹内 [5] による極大トーラスの基本胞体に関する結果を使う。

特に、2 つの実形が合同（すなわち、M の等長変換群の単位連結成分の元で移り合う）のときには次が成り立つ。

定理 3.2 ([7]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M の合同な実形で交叉が離散的であるとする。このとき、交叉 $L_1 \cap L_2$ は L_1 と L_2 の大対蹠集合になる。すなわち、$\#(L_1 \cap L_2) = \#_2 L_1 = \#_2 L_2$ が成り立つ。

定理 3.3 ([7]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2 を M の 2 つの実形で交叉が離散的であるとする。

(1) $M = G_{2m}(\mathbb{C}^{4m})$ $(m \geq 2)$ であり、L_1 は $G_m(\mathbb{H}^{2m})$ と合同、L_2 は $U(2m)$ と合同ならば、次が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 L_1 < 2^{2m} = \#_2 L_2.$$

(2) それ以外の場合、$L_1 \cap L_2$ は 2-number が小さい方の実形の大対蹠集合になり、次の等式が成り立つ。

$$\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2 L_1, \#_2 L_2\}.$$

既約ではないコンパクト型 Hermite 対称空間に対しては、命題 2.2 のそれぞれの場合に $L_{1,a}$ と $L_{2,a}$ の交点数を決定すればよい。(1) の場合は既約の場合に帰着される。(2) の場合、交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s} \cdots \tau_1(x)) \mid x \in N_1 \cap (\tau_{2s} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s+1})\}$$

となり、$(\tau_{2s} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s+1})$ は既約因子 M_1 の実形だから、この場合の交点数は N_1 と $(\tau_{2s} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s+1})$ の交点数に一致する。(3) の場合、交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s-1} \cdots \tau_1(x)) \mid x \in N_1 \cap (\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s})\}.$$

となり、$(\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s})$ は既約因子 M_1 の実形だから、この場合の交点数は N_1 と $(\tau_{2s-1} \cdots \tau_1)^{-1}(N_{2s})$ の交点数に一致する。(4) の場合、交叉は

$$\{(x, \tau_1(x), \tau_2\tau_1(x), \ldots, \tau_{2s-1} \cdots \tau_1(x)) \mid (x, \tau_{2s}^{-1}(x)) \in D_{\tau_{2s-1}\cdots\tau_1}(M_1) \cap D_{\tau_{2s}^{-1}}(M_1)\}$$

であり、$D_{\tau_{2s-1}\cdots\tau_1}(M_1)$ と $D_{\tau_{2s}^{-1}}(M_1)$ は $M_1 \times M_{2s}$ 内の対角実形だから、この場合の交点数はこれらの対角実形の交点数と一致する。したがって、(1), (2), (3) の場合は既約コンパクト型 Hermite 対称空間内の 2 つの実形の交点数に帰着し、定理 3.3 により既知である。(4) の場合は、2 つの互いに同型な既約コンパクト型 Hermite 対称空間の積内の 2 つの対角実形の交点数に帰着する。

定理 3.4 ([9]) M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、$A_0(M)$ を M の正則等長変換群の単位連結成分とする。M の反正則等長変換 τ_1, τ_2 から定まる対角実形 $D_{\tau_1}(M), D_{\tau_2^{-1}}(M) \subset M \times M$ の交叉が離散的になると仮定する。

(1) $M = Q_{2m}(\mathbb{C})$ $(m \geq 2)$ であり、$\tau_2\tau_1$ が $A_0(M)$ に含まれないならば、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2m < 2m + 2 = \#_2 M.$$

(2) $M = G_m(\mathbb{C}^{2m})$ $(m \geq 2)$ であり、$\tau_2\tau_1$ が $A_0(M)$ に含まれないならば、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = 2^m < \binom{2m}{m} = \#_2 M.$$

(3) それ以外の場合、$D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)$ は $D_{\tau_1}(M), D_{\tau_2^{-1}}(M)$ の大対蹠集合になり、

$$\#(D_{\tau_1}(M) \cap D_{\tau_2^{-1}}(M)) = \#_2 M.$$

ここでは、次の村上 [3]、竹内 [4] による結果を用いた。

補題 3.5 M を既約コンパクト型 Hermite 対称空間とし、M の等長変換群および正則等長変換群をそれぞれ $I(M), A(M)$、それらの単位連結成分を $I_0(M), A_0(M)$ とする。このとき、$I(M)/I_0(M)$ および $A(M)/A_0(M)$ は以下の通りである。

(1) M が $Q_{2m}(\mathbb{C})$ $(m \geq 2)$ または $G_m(\mathbb{C}^{2m})$ $(m \geq 2)$ のとき

$$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad A(M)/A_0(M) \cong \mathbb{Z}_2.$$

(2) M が上記以外のとき

$$I(M)/I_0(M) \cong \mathbb{Z}_2, \quad A(M) = A_0(M).$$

定理 3.3 および定理 3.4 の証明には、次の補題により極地に関する帰納法を用いる。

補題 3.6 ([7]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、M の原点 o に関する極地を

$$F(s_o, M) = \bigcup_{j=0}^{r} M_j^+$$

と表す。

(1) L を M の原点 o を通る実形とすると、L の極地は

$$F(s_o, L) = \bigcup_{j=0}^{r} L \cap M_j^+$$

となり、次の等式が成り立つ。

$$\#_2 L = \sum_{j=0}^{r} \#_2(L \cap M_j^+).$$

(2) L_1, L_2 を M の原点 o を通る実形で交叉が離散的であるとすると、次の等式が成り立つ。

$$L_1 \cap L_2 = \bigcup_{j=0}^{r} \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\},$$
$$\#(L_1 \cap L_2) = \sum_{j=0}^{r} \# \left\{ (L_1 \cap M_j^+) \cap (L_2 \cap M_j^+) \right\}.$$

実形の交点数の不変性および実形の交叉の合同性に関しては次の結果がある。

定理 3.7 ([7]) M をコンパクト型 Hermite 対称空間とし、L_1, L_2, L_1', L_2' を M の実形とする。さらに、L_1, L_1' は合同であり、L_2, L_2' も合同であると仮定する。L_1, L_2 の交叉が離散的で、L_1', L_2' の交叉も離散的ならば、$\#(L_1 \cap L_2) = \#(L_1' \cap L_2')$ が成り立つ。

系 3.8 ([8]) 定理 3.7 の設定のもとで、さらに $\#(L_1 \cap L_2) = \min\{\#_2(L_1), \#_2(L_2)\}$ という条件を加えると、$L_1 \cap L_2$ と $L_1' \cap L_2'$ は合同になる。

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., 308 (1988), 273–297.

[2] D. P. S. Leung, Reflective submanifolds. IV, Classification of real forms of Hermitian symmetric spaces, J. Differential Geom. 14 (1979), 179–185.

[3] S. Murakami, On the automorphisms of a real semisimple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, **4** (1952), 103–133.

[4] M. Takeuchi, On the fundamental group and the group of isometries of a symmetric space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1 **10** (1964), 88–123.

[5] M. Takeuchi, On conjugate loci and cut loci of compact symmetric spaces I. Tsukuba J. Math. **2** (1978), 35 – 68.

[6] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. J., (2) 36 (1984), 293–314.

[7] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, to appear in J. Math. Soc. Japan

[8] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, to appear in Osaka J. Math.

[9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type II, in preparation.

[10] H. Tasaki, The intersection of two real forms in the complex hyperquadric, Tohoku Math. J. 62 no.3 (2010), 375–382.